

Kombinatorické nepočítání

Mirek Olšák

Abstrakt. Když chceme ukázat, že dvě množiny jsou stejné velké, je často zbytečné pracně počítat jim prvky. Přitom může stačit sestavit bijekci, či prostě jen „nahlédnout“, že je to v obou případech totéž.

Definice. Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ je počet možností, jak do n příhrádek umístit k nerozlišitelných kuliček, do každé nejvýše jednu.

Rozcvička

Cvičení 1. $\square$ Nahlédněte, že $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Cvičení 2. $\square$ Nahlédněte, že roznásobením $(a+b)^n$ dostaneme

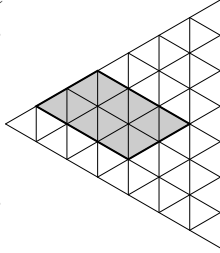
$$\binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Cvičení 3. $\square$ Nahlédněte

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Cvičení 4. $\square$ Nahlédněte, že počet možností, jak na šachovnici umístit blíže neurčený počet stělců tak, aby se vzájemně neohrožovali, je druhou mocninou přirozeného čísla.

Cvičení 5. $\blacksquare$ Uvědomte si, že počet všech rovnoběžníků v rovnostranném trojúhelníku o straně délky n s trojúhelníkovou mřížkou je $3 \binom{n+2}{4}$.



10

Všehochuť

Cvičení 6. $\square$ Je dáno přirozené číslo k a $n \geq k$. Uvažme náhodnou permutaci na $\{1, 2, \dots, n\}$. Nahlédněte, že pravděpodobnost, že prvky $1, 2, \dots, k$ leží v jednom cyklu, nezávisí na volbě n .

Cvičení 7. $\square$ Označme x_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících podřadivo $ABAB$ ani $BABAB$ a dále označme y_n počet slov délky n z písmen A, B neobsahujících nikde pět stejných po sobě jdoucích písmen. Nahlédněte, že $x_n = y_n$.

Cvičení 8. $\blacksquare$ Alča si nakreslila čtvercovou mřížku $n \times n$ a do každého políčka napsala počet všech obdélníků (a čtverců) v mřížce, které obsahují dané políčko (na obrázku je situace pro $n = 3$). Uvědomte si, že součet čísel ve všech políčkách je roven $\binom{n+2}{3}^2$. (MKS-29-3-7, Rakousko 2002)

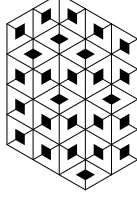
9	12	9
12	16	12
9	12	9

Cvičení 9. $\blacksquare$ Letecká společnost provozuje (obousměrné) spoje mezi některými (neuspořádanými) dvojicemi z n měst (povolené je i neprovozovat žádný spoj či všechny). Města přitom mají různé priority. Pokud navíc existuje spoj mezi městy a, b a město c má vyšší prioritu než b , tak existuje i spoj mezi a, c . Uvědomte si, že počet možností, jaké spoje provozovat, je 2^{n-1} .

Cvičení 10. $\square$ V $n-1$ vrcholech pravidelného n -úhelníku stojí ovce, ve zbylém vrcholu stojí vlk. V každém kroku se vlk přesune na náhodný sousední vrchol (jeden ze dvou), a pokud v něm stojí ovce, tak ji sežere. Vlč se nasytí až v okamžiku, kdy sežere $n-2$ ovcí, tedy právě jedna ovce přežije. Uvědomte si, že pravděpodobnost přežití každé ovce je stejná.

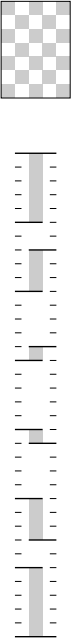
Cvičení 11. $\blacksquare$ Jsou dána přirozená čísla a, b, c . Uvažujte všechny tabulky ze záporných celých čísel $a \times b$, v nichž všechny řádky a sloupce jsou nerostoucí a všechna čísla jsou rovna nejvýše c (levý obrázek). Na druhé straně uvažte šestíúhelník s vnitřními úhly 120° a stranami délek a, b, c, a, b, c a sadu kosočtverců slepených ze dvou jednotkových rovnostranných trojúhelníků (pravý obrázek). Nahlédněte, že počet tabulek je stejný jako počet možností, jak vyskládat šestíúhelník kosočtverci.

2	2	1	1
2	2	0	0
1	1	0	0



11

Cvičení 12.  Buďte a, b nesoudělná lichá čísla. Na pravoúhelníku dlouhém ab vyznačte nejprve každou a -tou rysku, pak každou b -tou rysku, a nakonec obtáhněte každý druhý úsek mezi vyznačenými ryskami (začneme obtáhnutím prvního). Uvědomte si, že celková délka obtaženého úseku je rovna počtu černých políček na šachovnici $a \times b$, jejíž rohová políčka jsou černá. (MKS-31-8-6, Ruský folklór)



Cvičení 13.  Permutacím σ na množině $\{1, 2, \dots, 2n\}$, pro něž existuje $i < 2n$ takové, že $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$, říkáme dobré. Ostatní nazýváme špatné. Uvědomte si, že dobrých permutací je více než špatných. (IMO-1989-6)

Cvičení 14.  Jsou dána čísla $n \geq k$ stejné parity. V řadě stojí $2k$ lamp očíslovaných $1, \dots, 2k$. Na začátku jsou všechny zhasnuté. Jeden krok spočívá v rozsvícení zhasnuté lampy nebo zhasnutí rozsvícené. Označme X počet n -prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \dots, k$, a dále označme Y počet n -prvkových posloupností kroků, po kterých budou svítit právě lampy $1, \dots, k$, přičemž byly přepínány pouze tyto lampy. Rozmyslete si, že

$$\frac{X}{Y} = \frac{2^n}{2^k}.$$

Cvičení 15.  Je dáno $n \geq 3$ bodů očíslovaných $1, 2, \dots, n$. Z bodu s menším číslem vede vždy šipka do bodu s větším číslem. Obarvení šipek červenou a modrou nazveme *jednobarevné*, pokud pro libovolnou dvojici různých vrcholů A, B neexistuje zároveň modrá a červená cesta z A do B . Uvědomte si, že počet jednobarevných obarvení je $n!$. (IMO-2008-5)

Cvičení 16.  Adam a Bedřich hrají iKS-tenis na n míčkách. Pokudžádá jeden hráč podávat míček a některý z hráčů tento míček vyhraje. V okamžiku, kdy má někdo vyhráno n míčků, vyhrává celý zápas. První míček podává Adam a dále mohou být dvě schémata podávání: a) podává vždy ten, kdo naposled vyhrál míček, b) hráči se v podání se pravidelně střídají. Předpokládejme, že pravděpodobnost výhry míčku závisí vždy jen tom, který hráč podával. Rozmyslete si, že celkové šance hráčů na výhru zápasu nezávisí na volbě schématu.

Cvičení 17.  Jako plné n -tice přirozených čísel budeme označovat ty, ve kterých pro každé $i \geq 2$, jež se v n -tici vyskytuje, platí, že se v n -tici vyskytuje $i-1$, přičemž první výskyt $i-1$ je před posledním výskytem i . Rozmyslete si, že plných n -tic je $n!$. (IMO Shortlist 2002)

Cvičení 18. Označme $G(n)$ počet všech možných stromů (souvislých grafů bez kružnic) na daných n vrcholech. Bijektivně ukažte

$$n^n = G(n) \cdot n^2.$$

Cesty v mřížce

Cvičení 19.  Nahlédněte, že počet cest délky $a+b$ z levého dolního rohu do pravého horního v mřížce $a \times b$ je $\binom{a+b}{a}$.

Cvičení 20.  Necht a, b jsou přirozená čísla. Uvažme cesty podél mřížky z bodu $[0, 0]$ do bodu a, b , které nikdy nejdou doleva, nachází se v nich právě jeden krok dolů a žádný vrchol není navštívený vícekrát. Uvědomte si, že jejich počet je roven $(a+1)\binom{a+b}{a-1}$. (Variace na celostátní kolo MO 2015)

Cvičení 21.  Označme

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k.$$

Rozmyslete si, že $f(n) + f(n-1) = 2^n$.

Cvičení 22.  Bijektivně ukažte

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}.$$

Rozklady

Definice. Rozkladem čísla n délky $k \geq 1$ rozumíme konečnou nerostoucí posloupnost přirozených čísel $a_1, \dots, a_k$ splňující $a_1 + \dots + a_k = n$.

Cvičení 23.  Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n je roven počtu rozkladů čísla $2n$ délky n .

Cvičení 24.  Nahlédněte, že počet rozkladů čísla n délky k je stejný jako počet rozkladů n , kde $a_1 = k$.

Cvičení 25.  Rozklad nazveme symetrický, pokud pro každé i udává a_i počet prvků rozkladu velkých alespoň i . Uvědomte si, že symetrických rozkladů čísla n je stejně jako těch rozkladů čísla n , kde jsou jednotlivá a_i různá a současně lichá.

Cvičení 26.  Pro $m, n \in \mathbb{N}$ označme $f(m, n)$ počet n -tic $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ celých čísel splňujících $|x_1| + \dots + |x_n| \leq m$. Rozmyslete si, že $f(m, n) = f(n, m)$.

Cvičení 27.  Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n , ve kterých jsou všechna a_i různá, je stejný jako počet rozkladů čísla n , ve kterých jsou všechna a_i lichá.

Cvičení 28.  Bijektivně ukažte, že počet rozkladů čísla n , které neobsahují druhou mocninu přirozeného čísla, je stejný jako počet rozkladů čísla n , ve kterých se každé číslo i vyskytuje nanejvýš $(i-1)$ -krát.

Fibonacciho čísla

Definice. Počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 1$ kostičkami 1×1 a 2×1 , nazýváme n -tým Fibonacciho číslem a značíme F_n .

Cvičení 29.   Nahlédněte, že počet možností, jak vyskládat tabulku $(n-1) \times 2$ dominovými kostičkami je roven F_n .

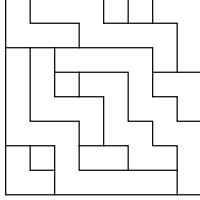
Cvičení 30.  Nahlédněte

$$F_{a+b+1} = F_{a+1}F_{b+1} + F_aF_b.$$

Cvičení 31.  Uvědomte si, že počet možností, jak rozdělit tabulku $(n+1) \times 1$ na dílky větší než 1×1 , je F_n .

Cvičení 32.  Uvědomte si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $n \times 1$ kostičkami s lichými rozměry, je F_n .

Cvičení 33.  Hledem označme konečnou posloupnost čtverců v mřížce takovou, že každý následující čtverček je těsně nad předchozím nebo těsně vpravo od něj. Rozmyslete si, že počet možností, jak vyskládat tabulku $a \times b$ pomocí hadů, je součinem několika (ne nutně různých) Fibonacciho čísel. Na obrázku je ukázka vyskládaného čtverce 8×8 .



Catalanova čísla

Definice. Počet všech cest délky $2n$ ve čtvercové mřížce $n \times n$ z levého dolního rohu do pravého horního, které vedou celé nad odpovídající úhlopříčkou, nazýváme n -té Catalanovo číslo a značíme jej C_n .

Cvičení 34.  Uvědomte si, že C_n je rovno počtu náhrdelníků s n bílými a $n+1$ černými korálky, přičemž náhrdelníky lišící se pouze otočením (nikoli překlopením) považujeme za nerozlišitelné. Na základě toho odvoďte

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Cvičení 35.  Nahlédněte, že počet možností, jak na sebe poskládat pyramidu z mincí se spodní řadou o n mincích (viz obrázek), je roven C_n .

Cvičení 36.  Rozmyslete si, že C_n udává počet zakořeněných binárních stromů na n vrcholech, kde rozlišujeme pravé a levé syny.



Cvičení 37.  Na základě předchozího cvičení nahlédněte, že počet možností, jak rozdělit pravidelný $(n+2)$ -úhelník na n trojúhelníků, je C_n .

Cvičení 38.  Dyckovou n -cestou rozumíme cestu o $2n$ krocích zprava doleva, která začíná ve výšce 0, v každém kroku popojuje o 1 šikmo nahoru nebo o 1 šikmo dolů, končí ve výšce 0 a nikdy nejde do záporné výšky. Kopečkem v Dyckově n -cestě rozumíme vrchol ve výšce 1, jehož oba sousední vrcholy leží ve výšce 0. Rozmyslete si, že počet všech kopečků ve všech Dyckových n -cestách je stejný jako počet všech Dyckových n -cest (což je zřejmě rovno C_n).



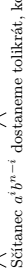
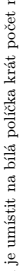
Cvičení 39.  Obrázcem délky n rozumíme neuspořádanou dvojici cest v mřížce délky n vedoucích pouze doprava a nahoru, a navíc takových, že se potkají pouze v prvním a posledním bodě. Bijektivně ukažte, že počet obrazců délky n je C_{n-1} . Na obrázku jsou dva obrazce délky 9.



Literatura a zdroje

- [1] Richard P. Stanley, *Bijjective proofs problems*
<http://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf>
- [2] Yufei Zhao, *Bijections*
<http://yufeizhao.com/olympiad/bijections.pdf>

Hinty

- Hint 1.**  $\rightarrow$ 
- Hint 2.** Sčítanec $a!b^n - i$ dostaneme tolikrát, kolik je možností, jak v i závorkách vybrat a a ve zbylých $n - i$ vybrat b .
- Hint 3.**  $\rightarrow$ 
- Hint 4.** Počet možností, jak je umístit na bílá políčka krát počet možností, jak je umístit na černá.
- Hint 6.** Při procházení cyklu začínajícího bodem 1 přeskakujte čísla vyšší než k .
- Hint 7.** Invertujte každou druhou pozici.
- Hint 10.** Každá ove se všimne vlka až v okamžiku, kdy se poprvé octne vedle ní.
- Hint 13.** Ve špatné permutaci přesuňte první prvek ke svému „kamarádovi“.
- Hint 14.** Vyděrete pomoci X , případně Y , počet těch n -prvkových posloupností kroků takových, že na konci bude pro každé $i \leq k$ svítit právě jedna z dvojice lamp $i, k + i$.
- Hint 15.** Obrátte červené šipky.
- Hint 16.** Kolikrát nejvýše mohou podávat jednotliví hráči v jednotlivých schématech? Karty osudu jsou rozdány, na hře nezáleží.
- Hint 17.** $2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 3 \Leftrightarrow 6, 3, 5, 2, 4, 1, 8, 7$
- Hint 19.** Právě a ze všech $a + b$ kroků povede vodorovně.
- Hint 23.** V rozkladu délky n snižte každý sčítanec o 1.
- Hint 27.** $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 = 1 + 4 + 3 + 6$
- Hint 28.** Nahraďte v prvním typu rozkladů vždy k stejných čísel k za číslo k^2 .
- Hint 29.** Stačí první řádek.
- Hint 34.** Černá = nahoru, bílá = doprava. Existuje právě jedno natočení náhrdelníku takové, že jej držíme za černý korálek a zbylá cesta vede nad dhlouprčkou.