

Lineární algebra II

Pokročilé cvičení

Pavel Klavík
Peter Zeman

Obsah:

- [5] Předmluva
- [7] Standardní skalární součin a norma
- [11] Abstraktní definice skalárního součinu a normy
- [17] Ortogonální projekce a Cauchy-Schwarzova nerovnost
- [21] Ortogonální báze a Gram-Schmidtova ortogonalizace
- [27] Metoda nejmenších čtverců a determinanty
- [31] Rozvoj, Cramerovo pravidlo, geometrická definice determinantu
- [37] Úvod do diferenciálních rovnic a vlastních čísel
- [43] Diagonalizace a vlastnosti vlastních čísel
- [47] Gershgorinova věta a analýza matic grafů
- [53] Schurův a spektrální rozklad matice
- [57] Ne normální matice a Jordanova normální forma
- [63] Fourierova transformace v řeči lineární algebry
- [67] Pozitivně definitní matice: extrémní a energie
- [73] Sylvestrova věta o setrvačnosti a minimaxová věta
- [79] Literatura

4

Předmluva

Tyto zápisky vznikly v letním semestru 2014/15, během výuky pokročilého cvičení z lineární algebry. Myšlenka pokročilého cvičení je vytvořit speciální kruh, který se zabývá složitějšími úlohami a problémy lineární algebry. Toto cvičení probíhá již několik let, od roku 2011.

Na pokročilém cvičení se nevěnujeme typickému počítání. Místo toho si studenti zkusí sami lineární algebru vybudovat: vymyslet definice a nalézt důkazy vět (tento proces vymýšlení není v tomto textu zachycen). Tím si studenti vyzkouší, jaké je vytvoření vlastní matematiky. Také si ukazujeme různé aplikace a souvislosti s jinými oblastmi matematiky.

Tento text pokrývá pouze druhý semestr lineární algebry. Pro první semestr je dostupný text Povídání o lineární algebře.

6

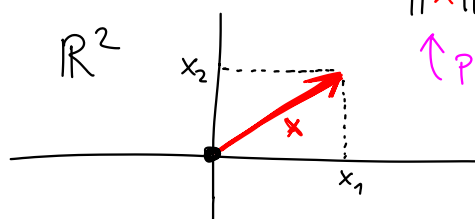
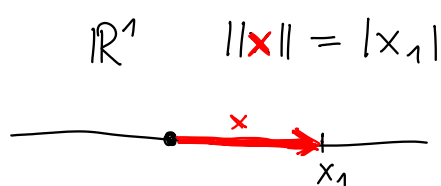
17.2.2015 - 1. cvičení

7

Standardní skalární součin a norma

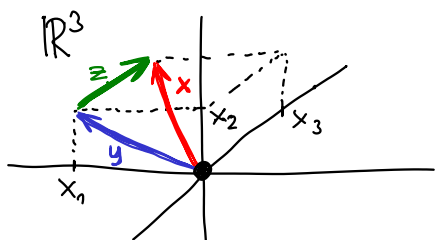
Během několika následujících cvičení chceme zavést do LA pojmy jako délka vektoru a kolmost (neboli ortogonalita).

Délka v $\mathbb{R}^n$ (standardní norma):



$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

↑ Pythagorova věta



Obecně v $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\|x\| = \sqrt{\|y\|^2 + \|z\|^2} = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^2 + x_3^2}$$

↑ Pythagorova věta

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

↑ Důkaz indukcí podle n ,
podobně jako při
kroku $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Ortogonalita: Kdy jsou vektory x a y kolmé?

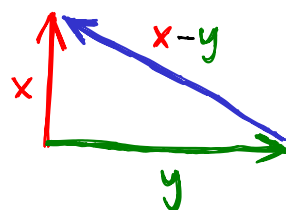
$x \perp y \Leftrightarrow$ platí Pythagorova věta v trojúhelníku

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$$

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2 = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2$$

$$0 = -2x_1y_1 - \dots - 2x_ny_n$$

neboli $x \perp y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0$.



[8] Tento výraz se nazývá standardní skalární součin $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$. Popisuje, jak moc vektory ukazují společným směrem.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} \begin{cases} = 0 & \text{kolmost (vůbec společný směr),} \\ > 0 & \text{ostrý úhel mezi } \mathbf{x} \text{ a } \mathbf{y}, \\ < 0 & \text{tupý úhel mezi } \mathbf{x} \text{ a } \mathbf{y}. \end{cases}$$

Platí, že $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$.

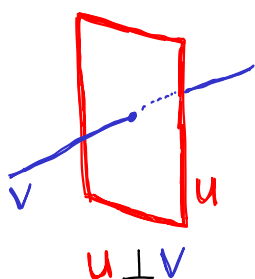
Nulový vektor je kolmý na cokoliv.

Lemma: Necht' $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_i \neq 0$ a $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$ pro $i \neq j$.
Potom jsou $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé.

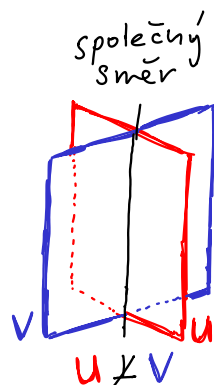
Důkaz: Necht' $d_1 \mathbf{x}_1 + \dots + d_k \mathbf{x}_k = 0$, vynásobíme zleva $\mathbf{x}_i^T$. Z ortogonality je $d_j \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j = 0$, tedy zbývá $d_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i = d_i \|\mathbf{x}_i\|^2 = 0$. Protože $\mathbf{x}_i \neq 0$, je $\|\mathbf{x}_i\|^2 > 0$. Tedy $d_i = 0$, a protože i můžeme zvolit libovolně, je výše uvedená lineární kombinace triviální. $\square$

Definici ortogonality rozšíříme na podprostory:

$$U \perp V \iff \forall u \in U, v \in V \quad u \perp v$$



A však neplatí z běžného jazyka (dvě stěny místnosti jsou na sebe kolmé, ...).



Ortogonální doplněk: $U^\perp = \{v : \forall u \in U, v \perp u\}$.

Ortogonalní doplňky mají řadu vlastností:

- (i) $U^\perp$ je vektorový podprostor.
- (ii) $U \cap U^\perp = \{0\}$, $\langle U \cup U^\perp \rangle = \mathbb{R}^n$, tedy
 $\dim U + \dim U^\perp = n$.
- (iii) $(U^\perp)^\perp = U$.

Vlastnost (i) a první část (ii) je snadná.

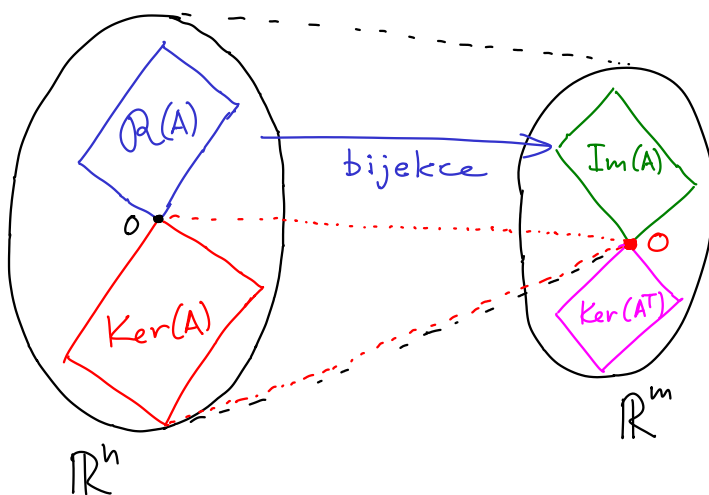
Dokažme $(U^\perp)^\perp \supseteq U$: Každý vektor $u \in U$ je kolmý na $U^\perp$, tedy podle definice patří do $(U^\perp)^\perp$. $\square$

Zbytek zatím nedokážeme, potřebovali bychom vědět, že ortogonálních vektorů je hodně. Konkrétně nás budou zajímat ortogonální báze:

Pro ně budeme chtít dokázat obdobu Steinitzovy věty, že jich je spousta.

Ukážeme, že libovolnou množinu ortogonálních vektorů lze doplnit na ortogonální bázi.

Fundamentální podprostory matice A



$R(A)$... řádkový podprostor,

$$Ker(A) = \{x : Ax = 0\}$$

... kernel,

$$Im(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$$

... obraz,

$Ker(AT)$... levý kernel.

10 V minulém semestru jsme dokázali, že $\text{Ker}(A)$ a $\mathcal{R}(A)$ jsou lineárně nezávislé a platí $\dim \text{Ker}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n$, podobně pro $\text{Im}(A) = \mathcal{R}(A^T)$ a $\text{Ker}(A^T)$.

Platí však mnohem silnější vlastnost:

Věta: $\text{Ker}(A) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $\text{Ker}(A^T) = \text{Im}(A)^\perp$.

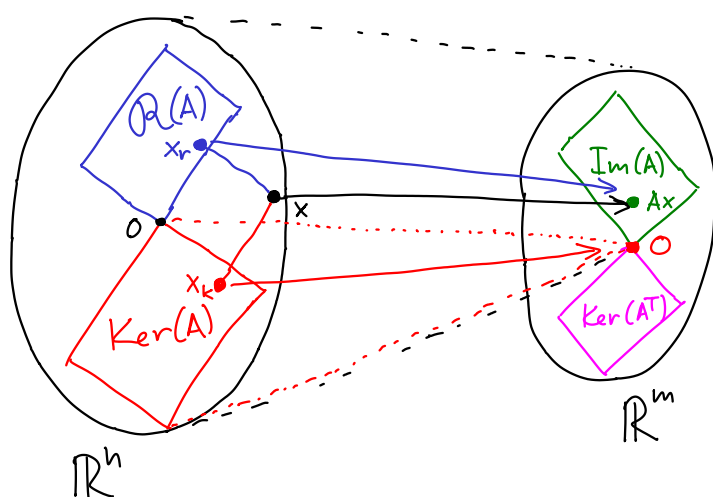
Důkaz:

Označme řádky A jako $u_1^T, \dots, u_m^T$ a necht' $x \in \text{Ker}(A)$.

Podle definice platí $Ax = 0$, což odpovídá

$$u_1^T x = 0, u_2^T x = 0, \dots, u_m^T x = 0,$$

tedy i libovolná lineární kombinace $u \in \mathcal{R}(A)$ je kolmá na x . Naopak libovolné $x \perp \mathcal{R}(A)$ patří do $\text{Ker}(A)$. Tedy $\mathcal{R}(A) = \text{Ker}(A)^\perp$ a v případě A^T získáme druhou rovnost. $\square$



Pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$
 lze uvést ortogonální
projekce $x_r \in \mathcal{R}(A)$
 $x_k \in \text{Ker}(A)$
 $x = x_r + x_k$.

Pokud by $A \upharpoonright \mathcal{R}(A)$
 nebyla bijekce, platilo
 by $x, y \in \mathcal{R}(A)$, $x \neq y$:
 $Ax = Ay \Rightarrow A(x-y) = 0$.
 Tedy $x-y \in \mathcal{R}(A) \cap \text{Ker}(A)$,
což je spor.

Abstraktní definice skalárního součinu a normy

Opět ilustrujeme dua různé způsoby, jak lze definovat matematické objekty:

- konkrétní ... popíšeme konstrukcí, ← typický první
- abstraktní ... popíšeme pouze vlastnostmi, které objekty musí splňovat.

Standardní skalární součin a norma z minulého cvičení je příklad prvního přístupu. Zkusíme z něj vybrat ty správné vlastnosti pro abstraktní definici.

Abstraktní definice: Skalární součin a norma jsou formy, přiřazují vektorům reálná čísla.

Norma $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ← lineární forma

- (i) Linearita: $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
- (ii) Trojúhelníková nerovnost: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (iii) Nezápornost: $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \geq 0$ a $\|x\| > 0$ pro $x \neq 0$.

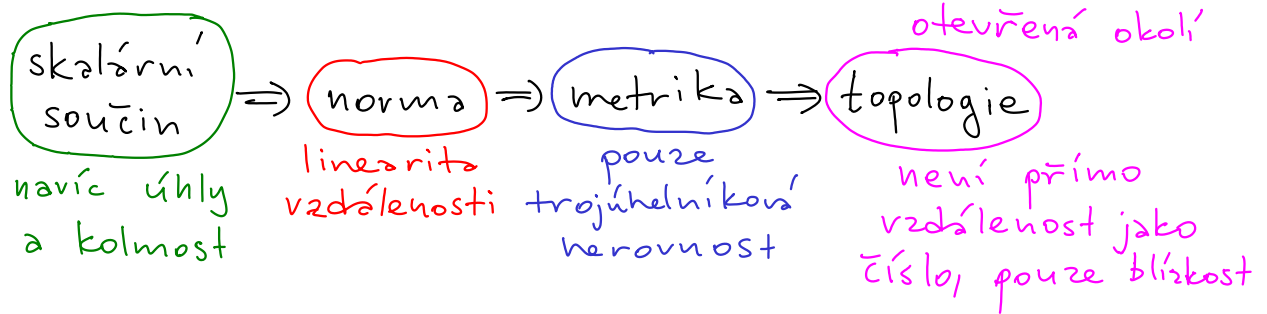
Skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ← bilineární forma

- (i) Linearita: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \langle x+y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$,
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \langle \alpha x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$.
- (ii) Symetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$.
- (iii) Pozitivní definitnost: $\langle x | x \rangle \geq 0$ a $\langle x | x \rangle > 0$ pro $x \neq 0$.

Poznámka: $\forall \mathbb{C}$ neplatí symetrie, ale $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$, ← komplexní sdružení
jinak by neplatilo (iii).

12 Každý skalární součin indukuje normu: $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.
 Nejtěžší je ověřit vlastnost (ii), zatím vynecháme.
 Naopak jsou normy, které neodpovídají součinu.

Geometrichost vektorových prostorů:



Charakterizujeme nestandardní skalární součiny:

Příklady nestandardního součinu:

1) Zvolme reálná čísla $c_1, \dots, c_n > 0$, potom je $\langle x|y \rangle = \sum c_i x_i y_i$ skalární součin.

2) Jiný příklad v $\mathbb{R}^2$:

$$\langle x|y \rangle = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2,$$

vlastnost (iii) platí, neboť

$$\langle x|x \rangle = 2(2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2) = 2(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2) \geq 0.$$

Tyto skalární součiny jdou popsat maticemi jako $\langle x|y \rangle = x^T A y = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$ pro vhodnou matici A, standardní skalární součin je pro $A = I$.

Příklad 1:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & \ddots \\ & & & c_n \end{pmatrix}.$$

Příklad 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dvě otázky: ① Pro které matice A je $x^T A y$ skalární součin?

② Je každý skalární součin tohoto typu?

Zaměřme se nejprve na první otázku.

Výraz $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ se obecně nazývá bilineární forma,
neboť je to funkce $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a splňuje linearitu (i).

→ Pro symetrii (ii) musí být $\mathbf{A}$ symetrická: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

→ Pro pozitivní definitnost (iii) musí být matice
 $\mathbf{A}$ pozitivně definitní:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \text{ a } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \text{ pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Jak takové matice vypadají zatím řešit nebudeme,
ukážeme si ekvivalentní definice na konci semestru.

Pozorování: Kdykoliv je $\mathbf{A}$ symetrická, pozitivně
definitní, je $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ skalární součin.

Věta: Libovolný skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ je roven
 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ pro nějakou symetrickou pozitivně
definitní matici $\mathbf{A}$.

Důkaz: Pokud známe skalární součin vůči libovolné
bázi, je z linearit jednoznačně určen.

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle, \text{ kde } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Zvolme $\mathbf{A}$ jako Gramovu matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n \rangle \end{pmatrix}$$

platí $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}.$

① Symetrickost $\mathbf{A}$
plyne z (ii).

② Pozitivní definitnost
plyne z (iii).

□

[14] Pro danou symetrickou pozitivně definitní matici A budeme značit skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ a příslušnou normu $\|\mathbf{x}\|_A = \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}$.

Jaký je geometrický význam těchto součinů/norem?

Věta: Matice A je symetrická pozitivně definitní, právě když existuje Choleského rozklad $A = R^T R$, kde R je regulární matice.

↖ Důkaz ukážeme na konci semestru.

Proto $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{y} = (R\mathbf{x})^T (R\mathbf{y}) = \langle R\mathbf{x} | R\mathbf{y} \rangle$.

Je to standardní skalární součin vůči jiné bázi, popsané maticí přechodu R . Podobně $\|\mathbf{x}\|_A$.

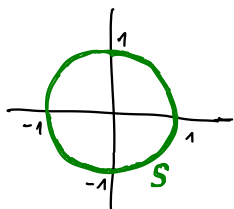
Charakterizace nestandardních norem:

Pokud na libovolné přímce zvolíme normu jednoho nenulového vektoru, je norma na přímce určena z linearitou (i). Stačí popsat jednotkovou sféru

$$S = \{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1 \}.$$

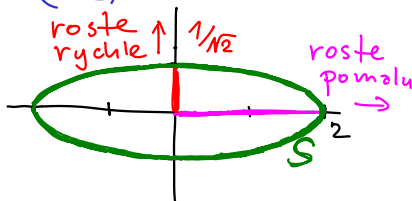
Ukažme příklady v $\mathbb{R}^2$:

standardní norma



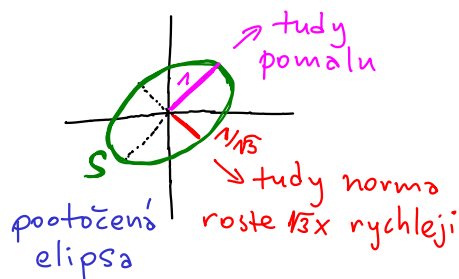
ve všech směrech stejná norma

$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 2 \end{pmatrix}$ -norma



elipsa s osami v kanonických vektorech

$\begin{pmatrix} 2-1 \\ -12 \end{pmatrix}$ -norma



pootočená elipsa

Věta: Pro každou A -normu $\|\cdot\|_A$ je jednotková sféra S elipsoid. ← osy ve směru vlastních vektorů A , budeme probírat později.
↖ Zatím bez důkazu.

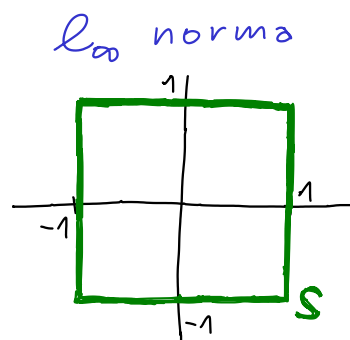
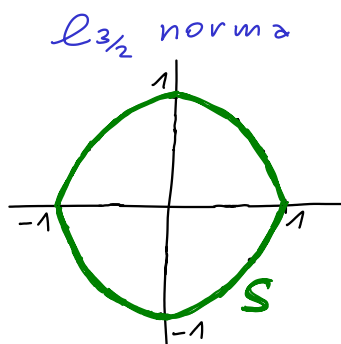
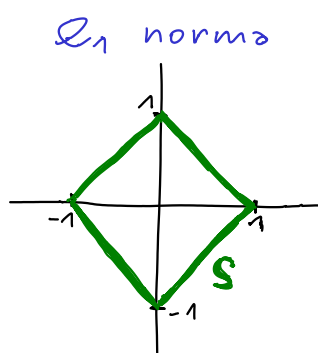
Existují ale i další normy, pro $p \neq 2$ nedefinované 15
skalárním součinem:

ℓ_p normy: $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad p \in [1; \infty]$.

→ ℓ_2 je standardní norma,

→ ℓ_1 je manhattonská norma $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$,

→ ℓ_∞ je maximová norma $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.



Obecně jednotková sféra může být ještě méně pravidelná. Necht' $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.

Lemma: Pro libovolnou normu platí:

(i) $\mathbf{S}$ obsahuje přesně dva body na každé přímce počátkem,

(ii) $\mathbf{B}$ je symetrická podle počátku,

(iii) $\mathbf{B}$ je konvexní.

Důkaz: (i) vyplývá z linearity a nezápornosti normy.

(ii) vyplývá z linearity pro $\alpha = -1$.

(iii) vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti,

čtenář si může rozmyslet. □

Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}$ platí pro libovolnou konvexní kombinaci, že $\|t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}\| \leq 1$.

16 Platí však i obrácená charakterizace:

Věta: Necht' B je uzavřená omezená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, symetrická podle počátku.

Necht' S je hranice B , že $0 \notin S$.

Potom je zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definované

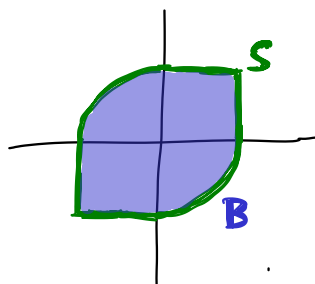
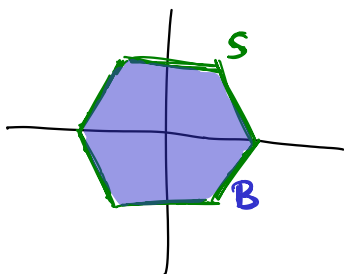
$$\|x\| = |\alpha|, \text{ když } x = \alpha y \text{ a } y \in S,$$

norma v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz: Jako cvičení, stačí ověřit vlastnosti

(i) až (iii). Nejobtížnější je trojúhelníková nerovnost. $\square$

Příklady obecných norem:



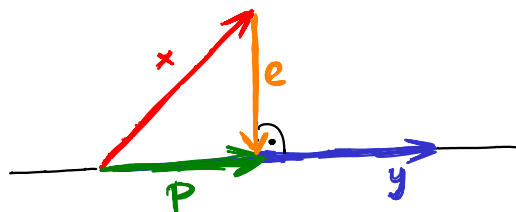
Ortogonalní projekce a Cauchy-Schwarzova nerovnost

V tomto cvičení objevíme geometrickou interpretaci pro skalární součin.

Ortogonalní projekce na přímku:

Mějme dva vektory x a y .

Chceme nalézt kolmou projekci p vektoru x na přímku $\langle y \rangle$.



Má platit $p = c \cdot y$. Chceme zvolit c tak, aby platilo

c nějaká konstanta

$$e = p - x \perp y.$$

← dosadíme za p .

$$0 = \langle p - x | y \rangle = \langle c y - x | y \rangle = c \langle y | y \rangle - \langle x | y \rangle, \text{ neboli } c = \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle}.$$

pouze normovací faktor

Věta: Kolmá projekce na přímku $\langle y \rangle$ je lineární zobrazení

$$x \mapsto \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y.$$

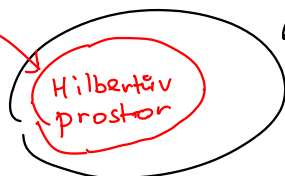
□

Cauchy-Schwarzova nerovnost:

Pro libovolné dva vektory x a y platí $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Motivace třeba ve funkcionální analýze, ve vektorových prostorech nekonečné dimenze. Zde mohou mít funkce nekonečnou normu, proto se omezíme na Hilbertovy podprostory pouze funkcí konečné normy. Podle nerovnosti je i konečný skalární součin.

konečná norma a skalární součin



← prostor všech funkcí (spojitých, diferencovatelných)

18. Důkaz nerovnosti:

Délka rozdílu projekce e je nezáporná, tedy i

$$\begin{aligned} 0 \leq \|e\|^2 &= \langle e | e \rangle = \langle p - x | p - x \rangle = \left\langle \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y - x \mid \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y - x \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y \mid \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y \right\rangle - 2 \left\langle \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y \mid x \right\rangle + \langle x | x \rangle = \\ &= \frac{\langle x | y \rangle^2}{\langle y | y \rangle} - 2 \frac{\langle x | y \rangle^2}{\langle y | y \rangle} + \langle x | x \rangle, \end{aligned}$$

stáčí elementární úpravy

symetrie linearita

opět linearita

neboli $\langle x | y \rangle^2 = \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$. $\nearrow$ Cauchy-Schwarzova nerovnost plyne odmocněním. $\square$

Dokažme nyní, že skalární součin indukuje normu $\sqrt{\langle x | x \rangle}$, konkrétně že platí trojúhelníková nerovnost.

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \quad \downarrow \text{vše kladné, uvažme druhou mocninu} \\ \langle x + y | x + y \rangle &\leq \langle x | x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y | y \rangle \\ \langle x | x \rangle + 2\langle x | y \rangle + \langle y | y \rangle &\leq \langle x | x \rangle + 2\|x\|\|y\| + \langle y | y \rangle \\ \langle x | y \rangle &\leq \|x\|\|y\| \rightarrow \text{Cauchy-Schwarzova nerovnost} \end{aligned}$$

Tedy trojúhelníková nerovnost je ekvivalentní s Cauchy-Schwarzovou nerovností.

Ortogonální projekce na obecný podprostor:

Popíšme nejprve matici P kolmé projekce na přímku:

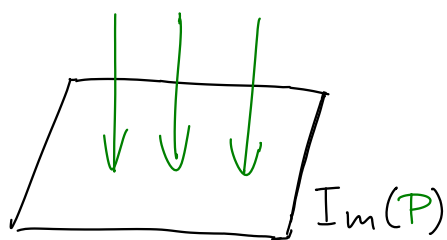
$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{\langle x | y \rangle}{\langle y | y \rangle} y, \text{ ve standardním skalárním součinu:} \\ x &\mapsto \frac{x^T y}{y^T y} y = y \frac{y^T x}{y^T y}, \text{ neboli } P = \frac{y y^T}{y^T y}. \end{aligned}$$

prohodíme pořadí členů

Odvodit přesný předpis pro obecný podprostor je složitější, zatím se spokojíme pouze s vlastnostmi P .

Vlastnosti, co musí P splňovat:

19



projekce na podprostor

① $\text{Im}(P)$ je fixován:

$$\forall y \in \text{Im}(P) \quad Py = y.$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad P(Px) = Px.$$

protože to platí pro každý vektor x , je $P^2 = P$.

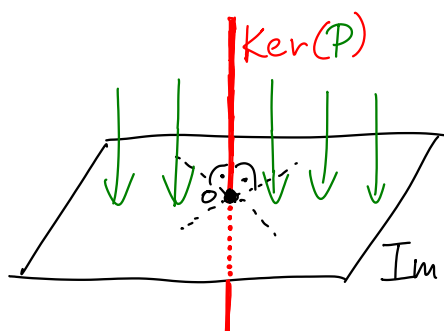
Věta: Matice P je projekce na podprostor $\text{Im}(P)$, právě když $P^2 = P$. $\square$

② Projekce je kolmá: $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x - Px \perp \text{Im}(P)$.

Speciálně $\text{Ker}(P) \perp \text{Im}(P)$, kvůli dimenzím je $\text{Ker}(P) = \text{Im}(P)^\perp$. Pro každou matici platí, že

$$\text{Ker}(P) = \mathcal{R}(P)^\perp, \text{ tedy}$$

$$\boxed{\text{Im}(P) = \mathcal{R}(P)}.$$



$\text{Im}(P)$ Chceme dokázat, že $P = P^T$.

Definice transpozice přes duální zobrazení:

Platí, že pro dané lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f^*: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, že platí:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \quad \underbrace{\langle f(x) | y \rangle}_{\mathbb{R}^m} = \underbrace{\langle x | f^*(y) \rangle}_{\mathbb{R}^n}.$$

duální zobrazení

Dokažme alespoň, že v případě standardního skalárního součinu a maticové reprezentace A je f^* reprezentováno A^T :

[20] Důkaz: Necht' A je matice, chceme zkonstruovat B tak, aby platilo $\langle A\mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | B\mathbf{y} \rangle$. Zjevně $B=A^T$ toto splňuje. Dokažme, že žádná jiná matice to nesplňuje, stačí pro kanonickou bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$:

$$a_{ji} = (A\mathbf{e}_i)_j = \sum_{k=1}^n (A\mathbf{e}_i)_k \cdot (\mathbf{e}_j)_k = \sum_{k=1}^n (\mathbf{e}_i)_k \cdot (B\mathbf{e}_j)_k = b_{ij}.$$

nenulové
pouze pro $k=j$

Tedy $B=A^T$.

nenulové
pouze pro $k=i$

□

Vraťme se k ortogonální projekci $\mathcal{P}$. Dokažme, že $\langle \mathcal{P}\mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathcal{P}\mathbf{y} \rangle$. Protože $\text{Ker}(\mathcal{P}) = \text{Im}(\mathcal{P})^\perp$, můžeme

vyjádřit: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_I$, kde $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \in \text{Ker}(\mathcal{P})$,
 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_k + \mathbf{y}_I$, kde $\mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I \in \text{Im}(\mathcal{P})$.

Protože $\mathcal{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$ a $\mathcal{P}\mathbf{y} = \mathbf{y}_I$, dostáváme:

$$\langle \mathcal{P}\mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_k + \mathbf{y}_I \rangle = \langle \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_k \rangle + \langle \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_I \rangle = \underbrace{= 0}_{\text{ortogonality}} + \langle \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_I \rangle = \langle \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_I \rangle.$$

$$\langle \mathbf{x} | \mathcal{P}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_I \rangle = \langle \mathbf{x}_k | \mathbf{y}_I \rangle + \langle \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_I \rangle = \langle \mathbf{x}_I | \mathbf{y}_I \rangle.$$

Tedy $\mathcal{P}^T = \mathcal{P}$. Naopak z této vlastnosti vyplývá, že $\text{Ker}(\mathcal{P}) = \text{Im}(\mathcal{P})^\perp$, tedy projekce je ortogonální.

Věta: Projekce $\mathcal{P}$ je ortogonální, právě když $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T$.

Brzo ukážeme, že když sloupce A tvoří bázi $\text{Im}(\mathcal{P})$, potom $\mathcal{P} = A(A^T A)^{-1} A^T$, speciální případ je $\mathcal{P} = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}}$.
projekce na přímku

Jiný způsob:

$\mathcal{P}$ zobrazuje $\mathbf{x}$ na nejbližší bod $\text{Im}(\mathcal{P})$. Lze využít analýzu a derivace. Zkuste pro projekci na přímku.

Ortogonalní báze a Gram-Schmidtova ortogonalizace

Připomeňme, že nenulové ortogonální vektory jsou lineárně nezávislé, tedy pojem ortogonální báze má smysl: $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0} : \mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j \quad \forall i \neq j$.

Chceme dokázat, že jich je hodně a mají bohatou strukturu:

Věta: Libovolnou množinu nenulových ortogonálních vektorů lze rozšířit na ortogonální bázi.

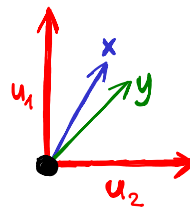
Motivace: Proč jsou ortogonální báze důležité?

→ Ortogonální vektory ukazují maximálním možným odlišným směrem.

① Výhodné numerické vlastnosti



versus



Souřadnice x a y vůči u_1, u_2 jsou velice odlišné, špatné pro zaokrouhlování.

Změna v souřadnicích je úměrná $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Krylovův podprostor $\mathcal{K}_n(A, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \dots, A^{n-1}\mathbf{v} \rangle$ obsahuje hodně informací o matici, lze využít například k řešení $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Problém je, že úhly mezi vektory jsou hodně malé, což při zaokrouhlování vede ke kumulaci chyb a ztrátě informace.

Řešení: konstrukce ortogonální báze $\mathcal{K}_n(A, \mathbf{v})$.
(tzv. Arnoldiho algoritmus)

22 (2) Snadný výpočet souřadnic pomocí ortogonálních projekcí, zatímco pro obecné báze je to řešení soustavy $A\alpha = x$.

Lemma: Pro ortogonální bázi $v_1, \dots, v_n$ je $x = \sum \alpha_i v_i$,

kde
$$\alpha_i = \frac{\langle x | v_i \rangle}{\langle v_i | v_i \rangle}.$$
 ← kolmá projekce na jednotlivé přímky

Důkaz: $\langle x | v_i \rangle = \langle \sum \alpha_j v_j | v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i | v_i \rangle.$ ← ortogonalita báze □

Mnohem snazší než pro obecné báze.

Základní myšlenka Fourierovy řady:

Hladké funkce $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor se standardním skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$
 ← $\int$ je jako $\sum$; rozmyslete si, že splňuje vlastnosti (i) až (iii).

Množina funkcí $B = \{\cos(nx), \sin(nx), 1 : n \in \mathbb{N}\}$ je ortogonální, což lze ověřit výpočtem integrálů.

Fourierova řada $f(x) = a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos(nx) + \sum_1^\infty b_n \sin(nx)$,

kde
$$a_n = \frac{\langle f(x) | \cos(nx) \rangle}{\langle \cos(nx) | \cos(nx) \rangle}, \quad b_n = \frac{\langle f(x) | \sin(nx) \rangle}{\langle \sin(nx) | \sin(nx) \rangle}.$$

Za určitých podmínek konverguje k $f(x)$, pokud $f(x) \in \langle B \rangle$. Je to aplikace lemmatu, souřadnice jsou ortogonální projekce na přímky vektorů B .

V analýze se řeší, které funkce leží v $\langle B \rangle$ a které vlastnosti jsou zachovány řadami funkcí. Lze uvažovat i na obecnějších prostorech.

První důkaz věty - fundamentální podprostory 23

Nechť $v_1, \dots, v_k$ je ortogonální množina, dejme je do řádků matice A . Tedy

$$\mathcal{R}(A) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle, \quad \dim \text{Ker}(A) = n - k.$$

Protože $\text{Ker}(A) = \mathcal{R}(A)^\perp$, můžeme zvolit libovolný vektor $0 \neq v_{k+1} \in \text{Ker}(A)$, čímž zvětšíme ortogonální množinu o jedna. Opakováním vytvoříme bázi. $\square$

Gram-Schmidtova ortogonalizace:

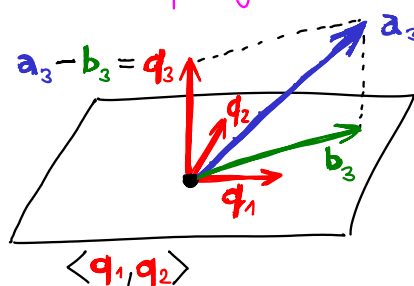
Z lineárně nezávislé množiny vektorů $a_1, \dots, a_k$ vyrobí ortogonální množinu $q_1, \dots, q_k$ stejného obalu.

Vektory ortogonalizujeme krok za krokem:

$$q_1 = a_1$$

$$q_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i | q_j \rangle}{\langle q_j | q_j \rangle} q_j = b_i$$

odečítáme kolmé projekce na $q_1, \dots, q_{i-1}$



Důkaz správnosti:

Je zřejmé, že $\langle q_1, \dots, q_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$. Nevíme však, že $q_1, \dots, q_k$ jsou ortogonální, budeme dokazovat indukcí:

$$\langle q_i | q_t \rangle = \left\langle a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i | q_j \rangle}{\langle q_j | q_j \rangle} q_j \mid q_t \right\rangle = \langle a_i | q_t \rangle -$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle a_i | q_j \rangle}{\langle q_j | q_j \rangle} \langle q_j | q_t \rangle = \langle a_i | q_t \rangle - \langle a_i | q_t \rangle = 0.$$

$\square$

Vlastně platí, že b_i je kolmá projekce a_i na podprostor $\langle q_1, \dots, q_{i-1} \rangle$.

[24] Je možné vektory $q_1, \dots, q_k$ průběžně normovat
→ vyhnout se dělení: $q_i := \frac{q_i}{\|q_i\|}$, potom $\langle q_j | q_j \rangle = 1$.

Druhý důkaz věty – přes Gram-Schmidtovu ortogonalizaci
Množinu $v_1, \dots, v_k$ libovolně doplníme na bázi a
ortogonalizujeme. □

Ortogonální matice: Matice Q je ortogonální, pokud
má ortonormální sloupce.

← ortogonalita + norma rovna jedné

Platí, že $Q^T Q = I_n$, tedy Q^T je levá inverze Q .

Pro čtvercové matice Q je Q^T jejich inverze.

→ sloupce jsou ortogonální báze

K ② motivaci: Vyjádření souřadnic vůči obecné bázi
vede na $A\alpha = x$, pro ortogonální bázi na $Q\alpha = x$, kde
 $\alpha = Q^T Q\alpha = Q^T x$, což odpovídá skalárním
součinům u kolmých projekcí.

$$\begin{bmatrix} -q_1- \\ -q_2- \\ \vdots \\ -q_n- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \\ | \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \langle x | v_1 \rangle \\ \langle x | v_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x | v_n \rangle \end{bmatrix}$$

Vlastnosti ortogonálních matic

→ Součin dvou ortogonálních matic $Q_1 Q_2$ je ortogonální.

Ortogonální matice tvoří grupu O_n , geometricky
jsou to rotace a zrcadlení. Podgrupa poloviční
velikosti SO_n je tvořena jen rotacemi.

← speciální ortogonální grupa

→ zachovávají standardní skalární součin:

$$\langle Qx | Qy \rangle = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Qy = x^T y = \langle x | y \rangle.$$

zachovávají úhly, délky: $\|Qx\| = \|x\|$. ← výhodné numericky,
neamplifikují chyby

Maticový zápis Gram-Schmidtovy ortogonalizace:

25

Matici $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_k \\ | & & | \end{bmatrix}$ transformujeme na $Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_k \\ | & & | \end{bmatrix}$,

která je ortogonální: $AR_1R_2\dots R_k = Q$.

R_i jsou dvou typů:

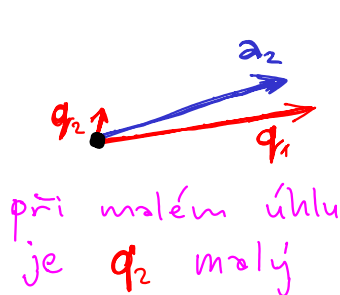
$$\begin{pmatrix} 1 & & -\langle a_i | q_1 \rangle & \\ & \ddots & -\langle a_i | q_2 \rangle & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & -\langle a_i | q_{i-1} \rangle & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{\|q_i\|} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

odečítá b_i normuje q_i

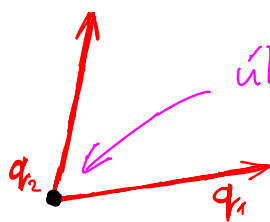
Slavný QR rozklad:

$A = QR \leftarrow \begin{matrix} \text{horní} \\ \text{ortogonální} \end{matrix} \text{ trojúhelníková}$

Má špatné numerické vlastnosti:



normování

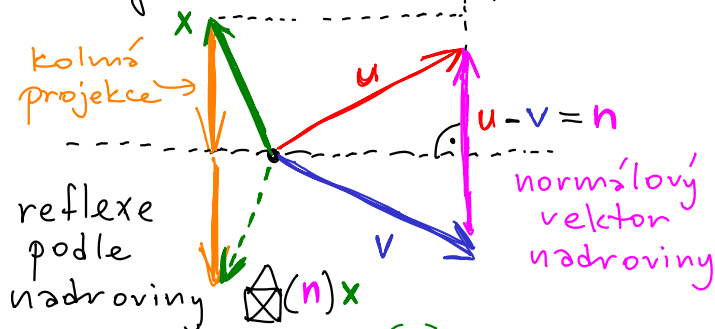


Metoda amplifikuje chyby.

Řešení: ortogonální úpravy $Q_k \dots Q_1 A = R$, potom R má stejné numerické vlastnosti jako A .

① Householderovy reflexe $\hat{\Delta}(n)$

Ortogonální matice, co zobrazuje $u \mapsto \|u\|e_1 = v$.



$\hat{\Delta}(n)x$ získáme odečtením dvojnásobku kolmé projekce x na n .

Tedy $\hat{\Delta}(n) = I - 2 \frac{nn^T}{n^T n}$ ← matice kolmé projekce na přímku

26

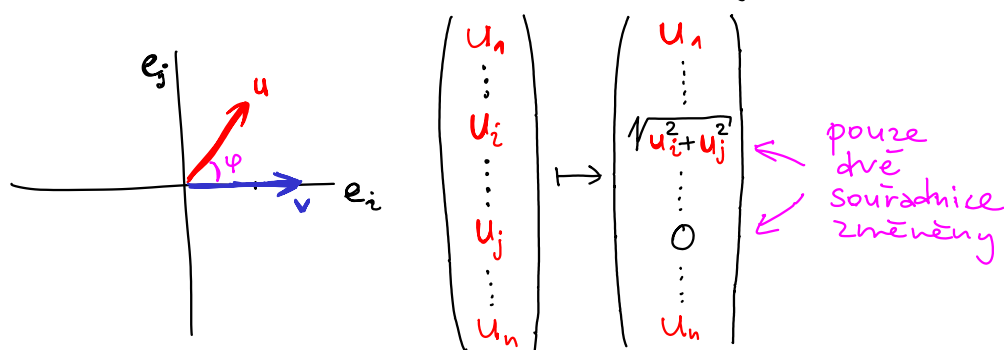
$$\left(\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right) (a_1 - \|a_1\| e_1) \cdot A = \begin{bmatrix} \|a_1\| & \text{red diagonal} \\ 0 & ? \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \text{red diagonal} \end{bmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \times \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} \right) \cdot A = \begin{bmatrix} * & * & \text{red diagonal} \\ * & * & ? \\ 0 & & \text{red diagonal} \end{bmatrix}$$

a tak dál. Získáme $A = QR$ po $n-1$ krocích.

② Givensovy rotace:

Vytvoří pouze jednu 0, musíme násobit $O(n^2)$ -krát, vhodné pro matice s hodně nulami.

Uvažme rovinu určenou e_i a e_j , v ní rotujeme:



$$R_{ij}^\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ & & \sin \varphi & \cos \varphi \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{u_i}{\sqrt{u_i^2 + u_j^2}} \right).$$

vhodné úhly

$$R_{1,n}^{\varphi_{1,n}} \dots R_{1,3}^{\varphi_{1,3}} R_{1,2}^{\varphi_{1,2}} A = R_{1,n}^{\varphi_{1,n}} \dots R_{1,3}^{\varphi_{1,3}}$$

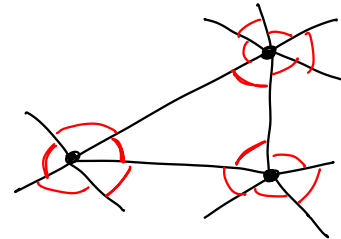
$$\begin{bmatrix} * & \text{red diagonal} \\ 0 & ? \end{bmatrix} \text{ původní část } A = \dots = \begin{bmatrix} * & \text{red diagonal} \\ 0 & ? \end{bmatrix}$$

a doděláme zbytek podobně jako v ①.

Metoda nejmenších čtverců a determinanty

Mějme soustavu $Ax=b$, řešení existuje $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$.
 Když řešení existuje, umíme ho najít. Co když není?
 V řadě aplikací nějaké řešení chceme najít.

Problémem se zabýval Gauss v zeměměřičství. Představme si, že chceme určit polohy bodů ze znalosti vzdáleností a úhlů.



více rovnic než neznámých,
typicky neexistuje řešení

Příklad:

$$2x = b_1$$

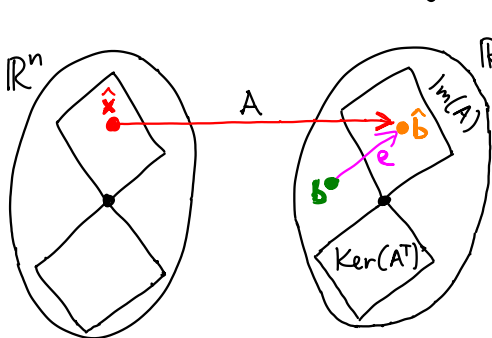
$$3x = b_2$$

$$4x = b_3$$

Řešení existuje
pouze tehdy,
když jsou prave
strany v poměru
2:3:4.

← Pokud pravá strana
pochází z měření,
typicky nebude platit
kvůli chybám.

Mohli bychom část rovnic vynechat, ale to bychom museli předpokládat, že chyba je jen v některých, což není typické. Chceme co nejméně změnit pravou stranu, aby řešení existovalo.



Metoda nejmenších čtverců:

$Ax=b$... nemá řešení

$A\hat{x}=\hat{b}$... chceme vyřešit,

kde $\hat{b} \in \text{Im}(A)$ je nejbližší vektor
k b , tedy kolmá projekce na $\text{Im}(A)$.

min.
součtu
čtverců
rozdílů

Ve statistice se toto nazývá lineární regrese.

$Ax=b$
 ↑ určeno modelem
 ↑ data

Například data jsou dvojice (x_i, y_i) ,
model je, že leží na parabole.

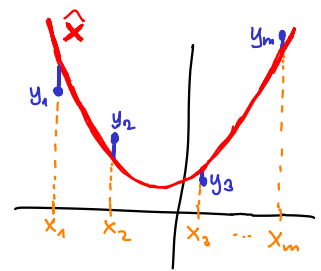
Hledáme neznámé a, b, c , aby platilo

$$ax_i^2 + bx_i + c = y_i.$$

28] Dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Typicky nebude existovat přesné řešení.



Existuje i totální metoda nejmenších čtverců:

Chceme upravit $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ na $\hat{A}\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{b}}$, aby se minimalizovaly rozdíly $A-\hat{A}$, $\mathbf{b}-\hat{\mathbf{b}}$. Situace, kdy nedůvěřujeme modelu. ← Matematicky složité, nebudeme řešit.

Jak vyřešit nejmenší čtverce?

$\mathbf{e}=\hat{\mathbf{b}}-\mathbf{b}$, platí, že $\mathbf{e} \perp \text{Im}(A)$, neboli $\mathbf{e} \in \text{Ker}(A^T)$.

$$0=A^T\mathbf{e}=A^T(\hat{\mathbf{b}}-\mathbf{b})=A^T(\hat{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}),$$

$$\hat{A}^T\hat{A}\hat{\mathbf{x}}=\hat{A}^T\mathbf{b}.$$

← normální rovnice

Předpokládejme, že A^TA je regulární, potom

$$\hat{\mathbf{x}}=(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} \quad \text{a} \quad \hat{\mathbf{b}}=A(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}.$$

Lze snadno ověřit, že ← Matice P kolmé projekce na podprostor $\text{Im}(A)$.
splňuje $P^2=P$ a $P^T=P$.

Matice A^TA má řadu zajímavých vlastností, například je symetrická pozitivně semidefinitní.

Lemma: $\text{Ker}(A^TA)=\text{Ker}(A)$.

Důkaz: $\text{Ker}(A^TA) \supseteq \text{Ker}(A)$: $A\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow A^TA\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

$\text{Ker}(A^TA) \subseteq \text{Ker}(A)$: $A^TA\mathbf{x}=\mathbf{0}$, vynásobíme zleva $\mathbf{x}^T$,

$$0=\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}=(A\mathbf{x})^TA\mathbf{x}=\|A\mathbf{x}\|^2.$$

← Vektor má nulovou normu, právě když je nulový. □

Proto $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$, tedy pokud má A lineárně 29
nezávislé sloupce, je $A^T A$ regulární a existuje $(A^T A)^{-1}$.

Lze i přes QR rozklad:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow QR\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Typicky není $Q^T Q R \hat{\mathbf{x}} = Q^T \mathbf{b}$
 čtvercová, proto
 neekvivalentní úprava: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\hat{\mathbf{x}} = R^{-1} Q^T \mathbf{b}$$

Numericky přesnější,
 protože $A^T A$ má
 druhou mocninu
 čísla podmíněnosti A.

Determinanty

$\det(A): \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, multilineární alternující forma
 (vůči sloupcům matice A).

Kolem roku 1900 klíčový pojem lineární algebry, dnes
 jsou v popředí jiné pojmy, třeba vlastní čísla.

Co může říct jedno číslo o matice? Ne tolik, ale
překvapivě hodně!

Jak definovat determinant?

← překvapivě těžké
 zvolit správný přístup

① Vlastnostmi. ← jako úkol

② Geometricky. ← přístě

③ Formulí v koeficientech:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

← není jasné, proč zrovna tato
 definice je zajímavá

Příklad 3x3:

$$\det \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \blacksquare \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \square & \square \\ \square & \square & \blacksquare \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \square & \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square \\ \blacksquare & \square & \square \end{bmatrix}}_{\text{znaménko } +1} - \underbrace{\begin{bmatrix} \square & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \square \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \square & \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \blacksquare \\ \square & \blacksquare & \square \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \square & \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \square \end{bmatrix}}_{\text{znaménko } -1}.$$

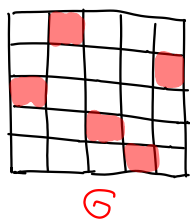
Chceme odvodit zajímavé vlastnosti $\det(A)$:

1) $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$. ← každý člen $\prod$ je vynásoben c

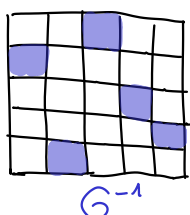
2) Vynásobení libovolného řádku c vynásobí c i det.
 ← právě jeden člen $\prod$ je vynásoben c

30) 3) $\det(A^T) = \det(A)$. $\leftarrow$ Vlastnosti řádků platí i pro sloupce.

Důkaz: Inverzní permutace násobí přes indexy zrcadlově podle diagonály a má stejné znaménko.



G



G^{-1}

Proto člen sumy $\det(A)$
pro G je raven členu $\det(A^T)$
pro G^{-1} , tedy $\det(A) = \det(A^T)$. $\square$

4) Nulový řádek implikuje nulový determinant.

5) Determinant je alternující:

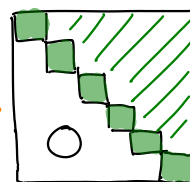
Prohození dvou řádků i a j mění znaménko.

Důkaz: Pro každou permutaci G dostaneme stejně členy Π
po prohození řádků při složení G s transpozicí (i, j) . Protože
složení mění znaménka, má determinant má opačné znaménko. $\square$

6) Dva stejné řádky $\Rightarrow$ nulový determinant. $\leftarrow$ stačí prohodit

7) Trojúhelníková matice T má $\det(T) = \prod t_{i,i}$.

Každá jiná permutace
násobí přes prvek $\rightarrow$
pod diagonálou,
což je nula.



8) Determinant je lineární v každém řádku.

$$\det \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_i + b_i & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_i & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & b_i & - \\ & \vdots & \\ - & a_n & - \end{pmatrix}.$$

Důkaz: Každý součin obsahuje jeden člen $a_i + b_i$, lze rozdělit
na dva determinanty. $\square$

9) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ je regulární. $\leftarrow$ nemění nenulovost

Důkaz: Převod do odstupňovaného tvaru a 4). $\square$

Rozvoj, Cramerovo pravidlo, geometrická definice determinantu

Nejprve dokažme, že determinant je multiplikativní:

Věta: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Důkaz: Pokud je A singulární, je i AB singulární, proto jsou obě strany nulové.

Pokud je A regulární, nechť $A = E_k \cdots E_1$ je poslopnost matic elementárních úprav, o nich už víme:

$$\det(E_i) = \begin{cases} +1 & \dots \text{přičtení jednoho řádku k druhému} \\ c & \dots \text{vynásobení řádku } c \\ -1 & \dots \text{prohození dvou řádků} \end{cases}$$

$$\det(E_i X) = \det(E_i) \det(X). \text{ Proto } \det(AB) = \det(E_k \cdots E_1 B) = \det(E_k) \cdots \det(E_1) \det(B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Druhý důkaz: Když A je regulární, uvažíme zobrazení

$$d(B) = \frac{\det(AB)}{\det(A)} \text{ a dokážeme, že je to determinant.}$$

Připomeňme si hledání polynomu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$ procházejícího body $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$:

$$\begin{pmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 & y_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & 1 & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 & y_{n+1} \end{pmatrix}$$

V_{n+1}

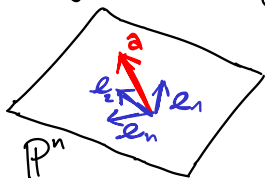
Vandermondova matice

$$V_{n+1} \mathbf{a} = \mathbf{y}, \text{ neboli } \mathbf{a} = V_{n+1}^{-1} \mathbf{y}.$$

Zobrazení $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
vyhodnocuje polynomy
v $x_1, \dots, x_{n+1}$.

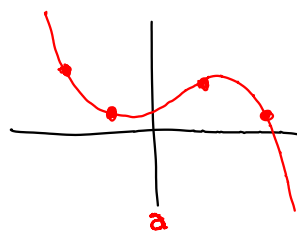
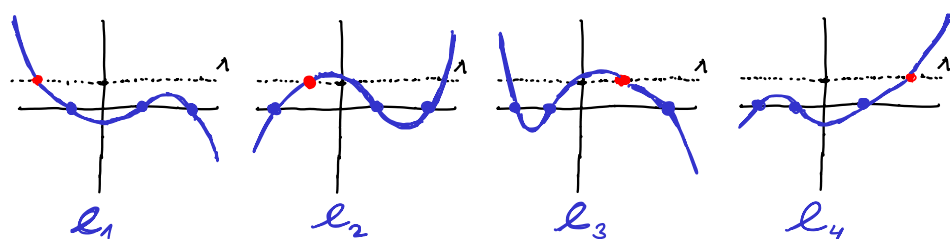
Inverze prokládá
polynom body
 $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$.

Ukázali jsme Lagrangeovu interpolaci



Hledáme neznámý polynom s koeficienty $\mathbf{a}$, vůči vhodné bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$. To je mnohem snazší než vůči kanonické.

32 Jak tato báze vypadá?



$$l_i(x) = \frac{(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdots (x-x_{n+1})}{(x_i-x_1) \cdots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \cdots (x_i-x_{n+1})} = \frac{\prod_{j \neq i} (x-x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i-x_j)}$$

↑ kořeny má v $x_j, j \neq i$ a $l_i(x_i) = 1$.

konstanta

$$a = y_1 l_1 + \cdots + y_{n+1} l_{n+1}$$

Podobné koeficienty se nachází v inverzi V_{n+1}^{-1} .

Spočítejme nyní $\det(V_{n+1})$:

První řešení: převod do odstupňovaného tvaru, ↑ trochu technické
využijeme $A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)(A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 + \cdots + B^n)$.

na řádcích 1, ..., n-1

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \begin{vmatrix} x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_1 + x_{n+1} & 1 & 0 \\ x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_2 + x_{n+1} & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_{n+1} + \cdots + x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_n + x_{n+1} & 1 & 0 \\ x_{n+1}^n & \cdots & x_{n+1}^2 & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{i \leq n} (x_i - x_{n+1}) \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ x_2^{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1 & 0 \\ \text{něco} & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \cdot \text{aplikujeme stejnou myšlenku}$$

postupně eliminujeme $(-x_{n+1})$.
sloupce zprava, zbyvší řádky pouze nejvyšší mocnina $\begin{bmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}$

Druhé řešení: determinant je polynom

$\det(A)$ je polynom v koeficientech matice $a_{1,1}, \dots, a_{n+1,n}$.

$\det(V_{n+1})$ je polynom $P(x_1, \dots, x_{n+1})$ stupně $n+n-1+\dots+0 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$.

Odečtením j -tého řádku od i -tého víme, že $P(x_1, \dots, x_{n+1})$ je dělitelný $(x_i - x_j)$.

$$P(x_1, \dots, x_{n+1}) = C \cdot \prod_{i < j} (x_i - x_j) \quad \text{a určíme } C = 1. \quad \square$$

↑ už máme správný stupeň

Laplaceův rozvoj determinantu

33

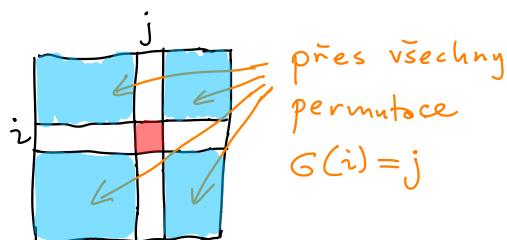
Chceme bychom určit $\det(A)$ jako lineární kombinaci i -tého řádku

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

Chceme určit čísla C_{ij} .

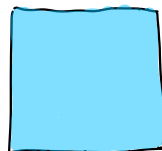
$$\det(A) = \sum_G \operatorname{sgn}(G) \prod_i a_{i, G(i)}.$$

← Každý člen sumy obsahuje právě jeden z koeficientů $a_{i1}, \dots, a_{in}$.



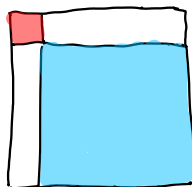
$$C_{ij} = \pm \det$$

můžeme přesunout a_{ij} na pozici 1,1, to mění znaménko $(i+j-2)$ -krát.

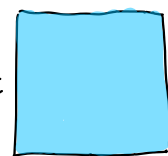


Můžeme přesunout a_{ij} na pozici 1,1, to mění znaménko $(i+j-2)$ -krát.

$$C_{ij} = \frac{(-1)^{i+j-2}}{a_{ij}} \cdot \det$$



$$= (-1)^{i+j} \cdot \det$$



Věta: Pro i -tý řádek libovolné matice A platí

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \dots + a_{in}C_{in},$$

$$\text{kde } C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}).$$

← Vznikne z A vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce.

Výhodné když i -tý řádek obsahuje hodně nul.

Adjungovaná matice a Cramerovo pravidlo

značí se $\operatorname{Adj}(A)$, platí $(\operatorname{Adj}(A))_{ij} = C_{ji}$.

Věta: $A \cdot \operatorname{Adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$, neboli $A^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}(A)}{\det(A)}$.

Důkaz: Nejprve se zaměříme na diagonálu:

$$(A \cdot \operatorname{Adj}(A))_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{ik} = \det(A) \text{ podle rozvoje.}$$

Mimo diagonálu:

$$(A \cdot \operatorname{Adj}(A))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot C_{jk} = \det(B) \text{ podle rozvoje,}$$

kde B vznikne z A nahrazením i -tého řádku j -tým, tedy $\det(B) = 0$.

□

[34] Determinanty jsou historicky starší než matice, snaha o nalezení formulí pro řešení soustav lineárních rovnic,

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} ca & cb & ce \\ ac & ad & af \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} ca & cb & ce \\ 0 & ad-cb & af-ce \end{array} \right).$$

✓ předpokládáme regularitu

$$y = \frac{af-ce}{ad-cb} \quad \text{cax} = ce - \frac{af-ce}{ad-cb} \cdot cb = \frac{ce(ad-cb) - cb(af-ce)}{ad-cb}.$$

$$x = \frac{acde - bc^2e - acbf + bc^2e}{a^2cd - abc^2} = \frac{ac(de-bf)}{ac(ad-cb)} = \frac{de-bf}{ad-cb}.$$

Tedy řešení jsou podíly dvou determinantů:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

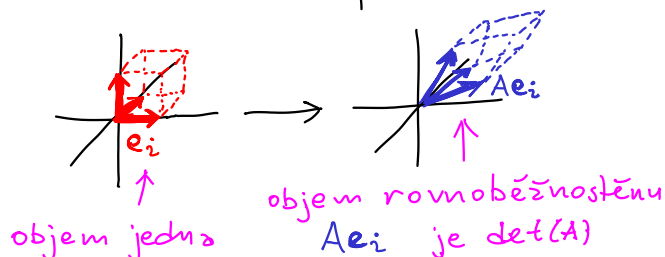
To platí obecně a nazývá se to Cramerovo pravidlo.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} \mathbf{b}, \quad \text{tedy } x_i = \frac{\sum_{k=1}^n b_k C_{ki}}{\det(A)} = \frac{\det(B_i)}{\det(A)} \leftarrow \text{Matice } B_i \text{ vznikne z } A \text{ nahrazením } i\text{-tého sloupce pravou stranou } \mathbf{b}.$$

Tato formule vedla ke zkoumání pojmu determinant.

Geometrická definice determinantu

Změna objemu při lineární transformaci.



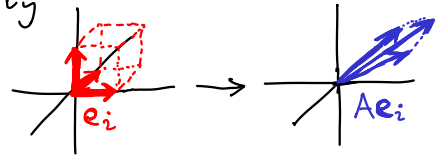
Abychom mohli dokázat ekvivalenci s definicí, museli bychom definovat objem a dokázat vlastnosti, což nebudeme dělat.

Proč to dává smysl?

1) $\det(I_n) = 1$, identita nemění objem.

2) Vynásobení řádku konstantou c natáhne rovnoběžnostěn v jedné dimenzi, proto mění objem c -krát, vynásobení sloupce natáhne jeden vektor Ae_i , tedy zase mění c -krát.

3) $\det(A)$ je nenulový, právě když je A regulární. Singulární 35
matice splácnou krychli, takže má nulový
objem. Regulární matice dělají nenulový
objem Ae_i .



4) Přičtení jednoho sloupce k druhému kosí jeden vektor
 Ae_i ve směru jiného vektoru Ae_j , což nemění objem.
Přičtení jednoho řádku k druhému zase kosí jednu
dimenzi do druhé, opět nemění objem.

5) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ znamená, že při složení se
změna objemu násobí.

6) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, neboť inverze ruší změnu objemu A .

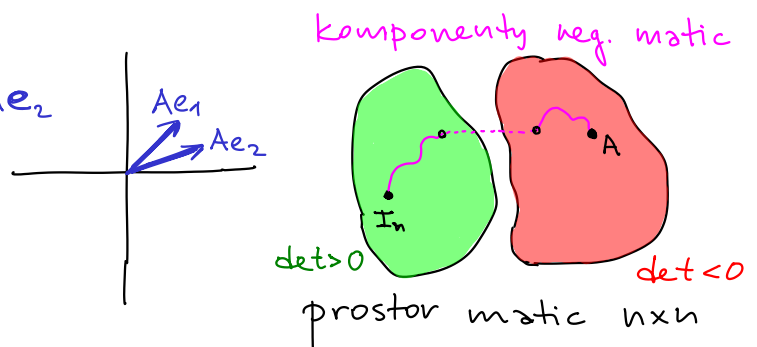
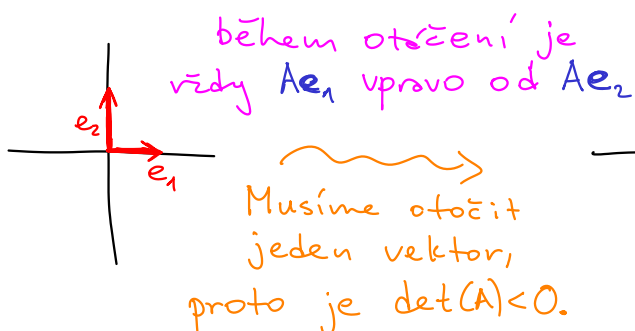
7) $\det(Q) = \pm 1$ pro ortogonální matici, neboť rotace a reflexe
nemění objem.

Co ale znamená znaménko pro objem?

Popisuje změnu orientace OS, ve 3D levotočivé versus
pravotočivé. Formálně lze definovat následovně:

Chceme spojitě transformovat $e_1, \dots, e_n$ na $Ae_1, \dots, Ae_n$,
aby se zachovala regularita v libovolný moment.

To ne vždycky jde, proto je dodatečná operace
 vynásobení vektoru (-1) , které ale mění znaménko $\det$.

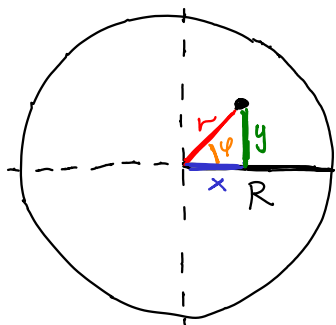


Aby to byla korektní definice, musíme dokázat, že na
libovolné cestě z I_n do A je stejná parita počtu
otočení vektorů. Speciálně prohození dvou řádků
lze vrátit jedním otočením, tedy mění znaménko.

36. Aplikace determinantu v analýze

Věta o substituci jednorozměrného integrálu obsahuje derivaci vnitřní funkce. Proč?

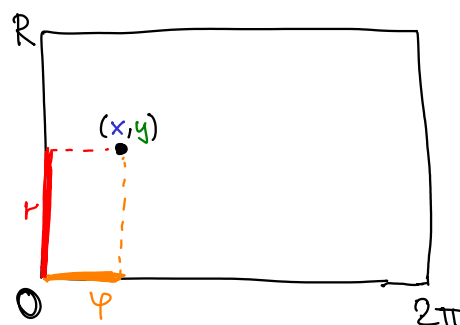
Mnohem názornější pro vícerozměrný integrál, chceme spočítat obsah kruhu o poloměru R :



Substituce do
polárních souřadnic.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



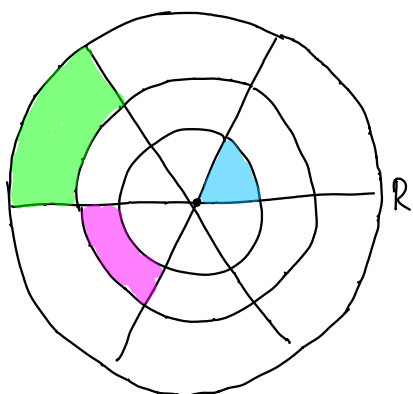
$$\iint_{x^2 + y^2 \leq R} 1 \, dx \, dy$$

Toto lze spočítat,
ale dělat nechceme.

Stačí spočítat obsah
obdélníka, což je $2\pi R$.

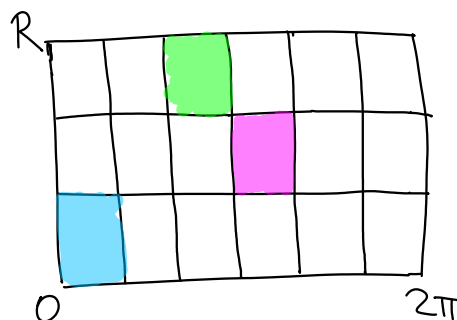
Ok, ale to je obvod
kruhu, ne obsah. Kde
jsme udělali chybu?

Integrujeme obdélník tak, že ho
nasekáme na malé obdélníčky,
podívejme se na jejich vzory.



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



Vzory blíže středu mají menší obsah. Při integrování
musíme vzít lokální změnou obsahu substituce.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\iint_{0}^{2\pi} \int_{0}^R \det(J) \, dr \, d\varphi = \text{obsah kruhu}$$

$$\iint_{0}^{2\pi} \int_{0}^R r \, dr \, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \frac{R^2}{2} \, d\varphi = \pi R^2$$

Úvod do diferenciálních rovnic a vlastních čísel

Udělejme malou odbočku do světa analýzy, který úzce souvisí s lineární algebrou: řešení řady problémů analýzy vedlo k rozvoji lineární algebry.

~1600 Galileo Galilei

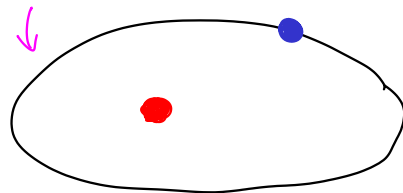
→ při volném pádu se poloha mění kvadraticky

~1670 Isaac Newton

Fyzika na Zemi a fyzika na nebi byla odlišná (věci vypadají zásadně odlišně). Planety mají dráhy podobné kruhům, což úplně nesedělo na pozorování.

Přesnější pozorování vedlo k modelu pohybu po elipsách, kde jsou planety v ohnisku.

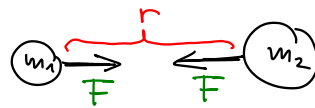
velice blízké kruhům



Newton spojil tyto dvě fyziky svojí mechanikou:

- Objekty mají pozice, rychlosti, působí na sebe silami.
- Dostáváme dynamický systém, Newtonovy zákony jsou jeho lokální změny.

Univerzální gravitace: $F = \frac{m_1 m_2}{r^2}$.



Lokální změny na planety dají eliptické orbity.

Pro to musel Newton vymyslet analýzu, aby mohl složit lokální změny v globální chování systému.

Poincaré - snaha o hledání kvalitativních řešení, místo rovnicek, který neexistuje pro složité systémy. Kvalitativní řešení popisuje chování pro $t \rightarrow \infty$:

konvergence, oscilace, ekvilibria.



[38] Geometrizace diferenciálních rovnic:

stavový prostor - prostor všech možných stavů dynamického systému.

Systém má proměnné a parametry.

mění se v čase

neměnné, ale ovlivňují systém

hodnot proměnných

Příklady:

	proměnné	parametry	stavový prostor
kyvadlo	úhlová poloha úhlová rychlost	délka hmotnost	rychlost poloha nekonečný vektor (povrch)
problém 2 těles	polohy rychlosti	hmotnosti těles	$\mathbb{R}^{12}$ 3x2 polohy 3x2 rychlosti } 3D
problém 3 těles	polohy rychlosti	hmotnosti těles	$\mathbb{R}^{18}$ 3x3 polohy 3x3 rychlosti } 3D

Determinismus ... z daného stavu je jednoznačně určena budoucnost a minulost systému.

Pro diferenciální rovnice platí, pokud jsou derivace malé.

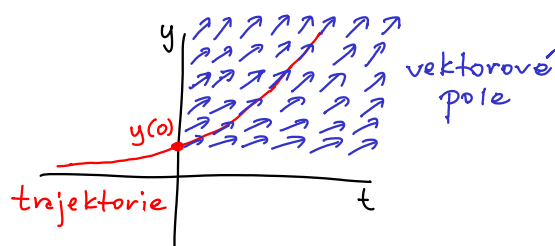
odpovídá trajektorii ve stavovém prostoru

Pro diferenciální rovnice máme vektorové pole, které je tečné k trajektorii v každém bodě.

Populační model

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y$$

reprodukční faktor

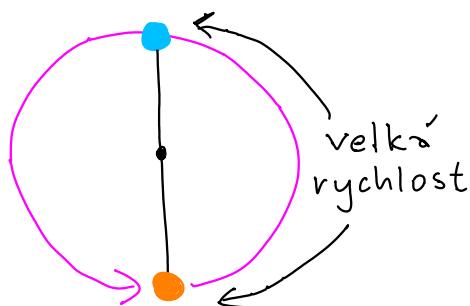
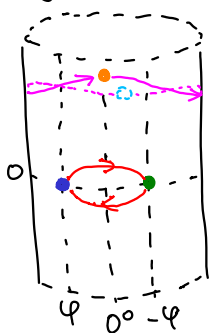
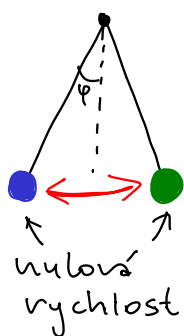


ne úplně stavový prostor: $\mathbb{R}_+$, proměnná velikost populace

Řešení: $y = c \cdot e^{rt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = c r e^{rt} = r y.$

Kyvadlo: Dva příklady ve stavovém prostoru.

39



$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \Theta = 0.$$

$\swarrow$ gravitační zrychlení
 $\nwarrow$ délka kyvadla

Θ ... úhel v čase

Teorie chaosu: Existují velice jednoduché systémy s velice komplikovaným chováním. Platí, že dva libovolně blízké počáteční stavy mají zcela odlišnou budoucnost, amplifikují se rozdíly.

Příklady: Dvojkývadlo, Lorenzova rovnice.

Klíčové: Lineární systémy diferenciálních rovnic lze řešit pomocí lineární algebry, nelineární systémy jsou typicky neřešitelné.

Vlastní čísla

Uvažme soustavu lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 4v - 5w \\ \frac{dw}{dt} &= 2v - 3w \end{aligned} \quad ; \quad \text{v řeči matic} \quad \frac{du}{dt} = A \cdot u, \quad \text{kde} \quad u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Derivace jsou lineární kombinace hledaných funkcí $v(t)$ a $w(t)$.

[40] Co kdyby existovalo řešení ← obdoba populačního modelu

$$u = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} \text{ pro nějaké } \lambda \in \mathbb{R}?$$

můžeme vykrátit $e^{\lambda t}$

$$A \cdot u = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ x_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \frac{du}{dt},$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

← $\mathbf{x} \neq 0$ vlastní vektor ← vlastní číslo

Stačí tedy najít vlastní čísla a vektory matice A .

Def.: Označme $Sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists \mathbf{x} \neq 0, A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \}$. ← spektrum matice

① Když $\lambda = 0$, získáme rovnici $A\mathbf{x} = 0$, tedy $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$.

Tedy 0 je vlastní číslo $A \iff \text{Ker}(A)$ je netriviální.

② Uvažme matice A a $A + dI$.

Když $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, potom $(A + dI)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + d\mathbf{x} = (\lambda + d)\mathbf{x}$.

Tedy $Sp(A + dI)$ vznikne z $Sp(A)$ zvětšením o d .

Dohromady: $\lambda \in Sp(A) \iff A - \lambda I$ je singulární

$$\iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

charakteristický polynom matice A

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu.
Pro matici $n \times n$ jich vždy existuje přesně n .

Vratně se k matici A z motivace:

41

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \\ = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Tedy $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Určíme vlastní vektory pomocí $\text{Ker}(A - \lambda I)$:

$$\begin{pmatrix} 4-2 & -5 & | & 0 \\ 2 & -3-2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & | & 0 \\ 2 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

musí být singulární

$$\begin{pmatrix} 4+1 & -5 & | & 0 \\ 2 & -3+1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $u = d \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$, kde d, B jsou konstanty podle počátečních podmínek $u(0)$.

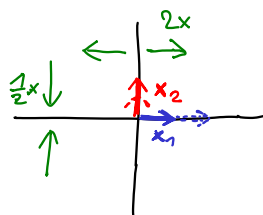
Geometrické příklady na maticích 2×2 :

Pro $\lambda \in \mathbb{R}$, $Ax = \lambda x \dots$ x je směr, kde A natahuje, ale nemění směr vektorů.
*↑ pouze pro $\mathbb{R}$,
v $\mathbb{C}$ komplikované!*

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \dots \text{identita}$$

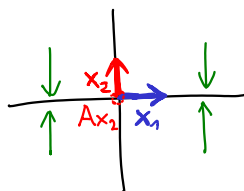
každý vektor je vlastní vektor,
 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix} \dots \text{natažení v osách}$$



$$\lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

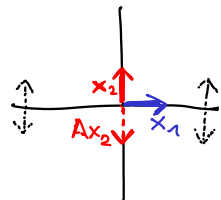
42 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$... kolmá projekce



$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$... zrcadlení



$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$... rotace o 90°

Stabilní směr není,
ale existují vl. čísla v $\mathbb{C}$:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_1 = +i, \quad \lambda_2 = -i,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

algebraická násobnost

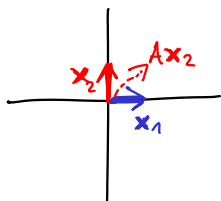
$\lambda = 1$ dvojnásobné,

ale pouze jeden
vlastní vektor $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

geometrická násobnost = 1

Násobení v $\mathbb{C}$ jsou
rotace a natahování,
 $\langle x_1 \rangle$ a $\langle x_2 \rangle$ jsou komplexní
roviny, v nichž se rotuje.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$... zkosení



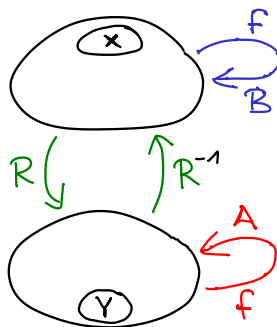
Existují degenerované matice, které nemají
báze z vlastních vektorů.

Diagonalizace a vlastnosti vlastních čísel

Připomeňme, že dvě matice A a B jsou podobné, pokud reprezentují stejné lineární zobrazení vůči různým bázím.

$$A = R B R^{-1}$$

matice přechodu od báze X k bázi Y



Pouze pro čtvercové matice, reprezentují endomorfismy vůči jedné bázi.

V případě soustavy lineárních diferenciálních rovnic to odpovídá substituci:

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad u = Rv, \quad \frac{dRv}{dt} = R \frac{dv}{dt} \Rightarrow R \frac{dv}{dt} = ARv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R^{-1}ARv.$$

Podobné matice mají stejná vlastní čísla:

$$A x = \lambda x \Rightarrow R B R^{-1} x = \lambda x$$

vlastní vektor A

$$B R^{-1} x = \lambda R^{-1} x$$

příslušný vlastní vektor B

Algebraická motivace pro studium vlastních čísel:

Chceme nalézt bázi, v které je matice reprezentující endomorfismus co nejjednodušší.

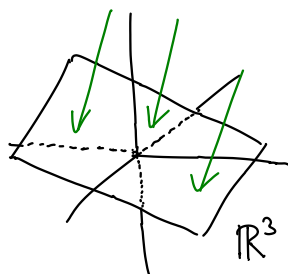
Předpokládejme, že existuje báze tvořená vlastními vektory $x_1, \dots, x_n$. Necht' A reprezentuje vůči kanonické bázi:

$$S = \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \cdots & x_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad AS = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_n x_n \\ | & & | \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = S \Lambda S^{-1}$$

diagonalizace

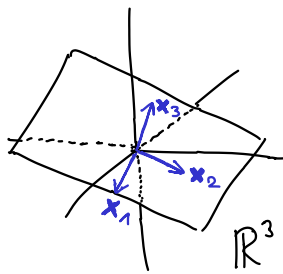
44 ☹ Matice je podobná diagonální matici $\Leftrightarrow$
 existuje báze z vlastních vektorů.

Příklad: Kolmá projekce na rovinu v $\mathbb{R}^3$.



v kanonické bázi
 složitá matice:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$



pro vhodnou
 bázi x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma: Pokud $Ax = \lambda x$ a $Ax' = \lambda' x'$ a $\lambda \neq \lambda'$, potom jsou
 vlastní vektory x a x' lineárně nezávislé.

Důkaz: Necht' $x = \alpha x'$, potom $\lambda x = Ax = \alpha Ax' = \alpha \lambda' x' = \lambda' x$.

Protože $x \neq 0$, je to spor s $\lambda \neq \lambda'$. $\square$

Podobně platí pro více vlastních vektorů. Speciálně, pokud
 jsou vlastní čísla po dvou různá, má každý vlastní
 vektor, a tyto vektory tvoří báze $\Rightarrow$ diagonalizace.

Mocniny diagonalizovatelné matice

$$A^k = (S \Lambda S^{-1})^k = \underbrace{S \Lambda S^{-1} S \Lambda S^{-1} \dots S \Lambda S^{-1}}_{k\text{-krát}} = S \Lambda^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$

stačí umocnit
 vlastní čísla na diagonále

Lineární diferenční systémy

Diskrétní systém s n proměnnými, mění se v krocích $y_0, y_1, \dots \in \mathbb{R}^n$

y_0 ;
 počáteční stav

$$y_{k+1} = Ay_k.$$

$\uparrow$
 $n \times n$

nový stav závisí lineárně
 na předchozím stavu

Tedy $y_k = A^k y_0$.

Pokud je A diagonalizovatelná, potom lze vyřešit pomocí
 vlastních čísel:

$$y_k = S \Lambda^k S^{-1} y_0.$$

Existují i obecné rozklady (Jordanova forma $A = S^{-1} J S$).

Jiný popis: Necht' $x_1, \dots, x_n$ je báze vlastních vektorů [45]
matice A , s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$y_0 = \sum \alpha_i x_i \Rightarrow y_k = A^k y_0 = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n A^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \alpha_i x_i.$$

Lze modelovat libovolnou lineární rekurenci (úkol)

Fibonacciho čísla: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Systém má 2 proměnné: $y_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, platí

$$A y_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = y_{k+1}.$$

Nalezneme vlastní čísla a vektory A :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda) - 1 = -\lambda^2 + \lambda - 1. \quad \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = -\lambda_2 \quad \text{zlátý řez} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & -1 \end{array} \right)$$

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k x_2. \quad \text{po substituci: } \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Tedy F_k získáme jako druhou souřadnici:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k.$$

Součet a součin vlastních čísel:

Uvažme charakteristický polynom

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

Zjevně pro $\lambda = 0$ platí, že $\det(A) = \alpha_0$. Na druhou stranu

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda).$$

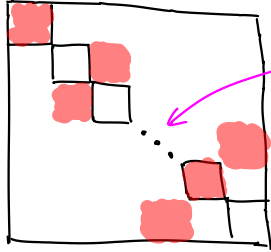
Proto $\alpha_0 = \prod \lambda_i$ a $\det(A)$ je součin vlastních čísel.

46 Součet vlastních čísel je také důležitý parametr.

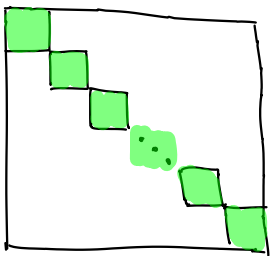
$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

proto $\alpha_{n-1} = \sum \lambda_i$. V $A - \lambda I$ je λ pouze na diagonále.

Uvažme členy $\det(A - \lambda I)$:



$A - \lambda I$



na diagonále
 $a_{i,i} - \lambda$

1) Permutace $G \neq \text{id}$.

Potom G obsahuje nejvýš $n-2$ diagonálních členů, tedy stupeň λ je $\leq n-2$.

2) Permutace $G = \text{id}$.

Potom je člen $\det(A - \lambda I)$ roven

$$(a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) \cdots (a_{n,n} - \lambda)$$

Aby bylo λ^{n-1} , musíme vybrat přesně jeden člen $a_{i,i}$, tedy $\alpha_{n-1} = \sum a_{i,i} = \text{tr}(A)$.

stopa matice A ↗

lze verifikovat výpočty



Tedy $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$.

Gershgorinova věta a analýza matic grafů

Nejprve ukažme odhad na vlastní čísla obecné matice:

Gershgorinova věta: Necht' A je matice.

Uvažme disky D_i v komplexní rovině:

střed $D_i = a_{ii}$, poloměr $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Potom každé vlastní číslo $\lambda \in \bigcup D_i$.

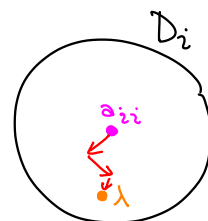
Důkaz: Pokud $\lambda \in \text{Sp}(A)$, existuje vlastní vektor x .

Necht' x_i je v absolutní hodnotě největší složka, uvažme vlastní vektor $y = \frac{x}{x_i}$. Platí, že $|y_j| \leq 1$, $y_i = 1$.

$$\lambda = (Ay)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij} y_j$$

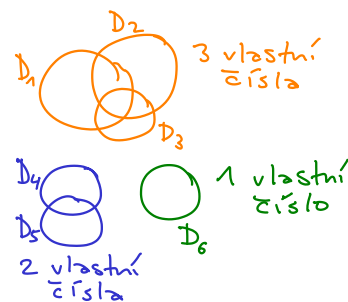
nejvýše se vzdálíme r_i ze středu
střed disku D_i rotuje a možná zkrátí a_{ij}

Proto $\lambda \in D_i$.



Topologická varianta:

Uvažme komponenty disků D_i v rovině. V každé komponentě je tolik vlastních čísel, kolik obsahuje disků.



Důkaz: Potřebujeme dva fakty:

- 1) Vlastní čísla jsou spojitá v koeficientech matice, neboť to jsou kořeny polynomu v koeficientech matice.
- 2) Vlastní čísla diagonální matice jsou koeficienty na diagonále. (Platí i pro trojúhelníkové matice.)

Necht' D je diagonální část A , uvažme spojitou transformaci

$$A(t) = tA + (1-t)D, \quad t \in [0, 1] \quad A(0) = D \quad A(1) = A$$

Každé vlastní číslo se spojitě posune z a_{ii} do λ , nemůže změnit komponentu disků.



48 Důkaz, že všechna vlastní čísla reálné matice jsou reálná:

Nechť $Ax = \lambda x$, vynásobíme zleva x^T :

$$x^T Ax = \lambda x^T x, \text{ neboli } \lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

To je podíl dvou reálných čísel, proto $\lambda \in \mathbb{R}$.

Toto nedává smysl, třeba rotace o 90° má komplexní vlastní čísla. Důkaz je špatný! [?]

Problém je, že x může mít komplexní koeficienty.
Lze však opravit pro symetrické matice.

Protože pracujeme v $\mathbb{C}$, budeme pracovat s jinou definicí skalárního součinu a normy:

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \quad \leftarrow \text{komplexní sdružení}$$
$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \dots + \overline{x_n} x_n}.$$

Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, definujeme komplexní (Hermitovskou) transpozici $A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (někdy značená A^H):

$$(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$$

Matice A je symetrická,
pokud $A = A^*$. ← nutně reálná diagonála

Platí, že $\langle x | y \rangle = x^* y$ a $\|x\| = \sqrt{x^* x}$.

Věta: Symetrická matice $A = A^*$ má všechna vlastní čísla reálná.

Důkaz: Stejně jako předtím vynásobíme $Ax = \lambda x$ zleva x^* :

$$x^* Ax = \lambda x^* x, \text{ neboli } \lambda = \frac{x^* Ax}{x^* x}.$$

Jmenovatel je $\|x\|^2$, což je podle definice reálné číslo.

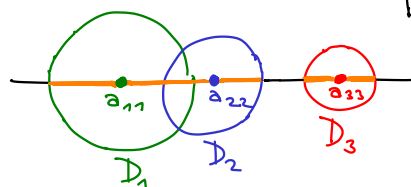
Čitatel je $x^* Ax \in \mathbb{C}$, uvažme jeho transpozici:

$$(x^* Ax)^* = x^* A^* (x^*)^* = x^* A^* x = x^* Ax. \quad \leftarrow \text{symetrie } A$$

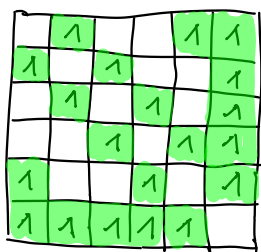
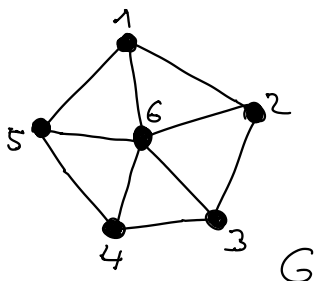
Proto $x^* Ax \in \mathbb{R}$, a tedy $\lambda \in \mathbb{R}$.

tentokrát už správně
😊 → □

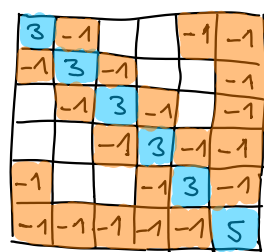
Pro symetrické matice leží středy všech disků D_i z Gershgorinovy věty v $\mathbb{R}$, proto $\lambda \in \bigcup D_i \cap \mathbb{R}$.



Matice grafů: aplikujeme vlastní čísla



A_G
matice sousednosti



L_G
Laplaceova matice

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & ij \in E \\ 0 & ij \notin E \end{cases} \quad (L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(i) & i=j \\ -1 & ij \in E \\ 0 & ij \notin E \end{cases}$$

stupeň vrcholu i

Z pohledu „matice = tabulka“ čísel je L_G redundantní.
Avšak jsou to jiná lineární zobrazení, proto jejich analýza odhalí jiné vlastnosti G .

Nechť $\mathbf{x}$ je vektor ohodnocení vrcholů grafu.
Uvažme $A_G \mathbf{x}$ a $L_G \mathbf{x}$:

$$(A_G \mathbf{x})_i = \sum_{j \in E} x_j \quad (L_G \mathbf{x})_i = \deg(i) \cdot x_i - \sum_{j \in E} x_j$$

sčítáme ohodnocení sousedů $\deg(i)$ -krát hodnota x_i minus průměr hodnot sousedů

Laplaceova matice grafu:

Diskretizace Laplaceova operátoru Δ , důležitý pro fyziku a diferenciální rovnice.

divergence gradientu

$$\text{Ve 3D: } \Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla f(x, y, z).$$

O kolik se liší hodnota $f(x, y, z)$ od průměru na okolí.

50 Například rovnice tepla ve 3D:

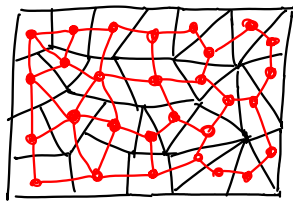
$h(x,y,z,t)$ teplota v bodě (x,y,z) v čase t .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta h.$$

← Bod mění svoji teplotu tím rychleji, čím je jeho teplota víc odlišná od průměru okolí.

Například Laplaceova rovnice $\Delta h = 0$ hledá teplotní ekvilibrium s předepsanými okrajovými podmínkami.

L_G je diskretizace Δ :



↑
difúze po hranách

Pro malé kousky prostoru předpokládáme konstantní teplotu.

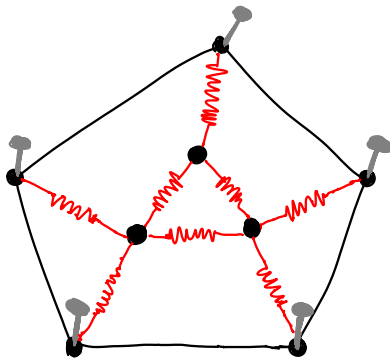
L_G je rozdíl teploty kusu a průměru jeho sousedů.

Podle Gershgorinovy věty je $\text{Sp}(L_G) \subseteq [0; 2\Delta(G)]$. ← max. stupeň

Aplikace: Spektrální kreslení grafů

Laplaceovy matice lze využít ke kreslení grafů.

Tutte (1963): Mějme 3-souvislý rovinný graf. Zvolme konvexní nakreslení vnější stěny. Pokud umístíme ostatní vrcholy do těžiště sousedů a nakreslíme hrany rovnými čarami, získáme rovinné nakreslení.



Necht $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou vektory pozic vrcholů.

Fyzikální interpretace:

Vrcholy vnější stěny přišpendlíme, na ostatní hrany dáme pružiny.

System minimalizuje potenciální energii

$$\mathbf{x}^* L_G \mathbf{x} + \mathbf{y}^* L_G \mathbf{y} = \sum_{i,j \in E} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

To umístí vnitřní vrcholy do těžiště jejich sousedů.

Vyřešíme pouze souřadnice x , pro y obdobně.

Předpokládejme, že vrcholy $1, \dots, k$ jsou přispendleny.

Tedy $x_1, \dots, x_k$ jsou předepsány a pro $i > k$ má platit $(L_G x)_i = 0$.

Vyškrtnutím prvních k řádků a dosazením $x_1, \dots, x_k$ získáme

$\rightarrow L'_G x' = b$, Tutte dokázal, že L'_G je regulární
 $(n-k) \times (n-k)$ a že získáme rovinné nakreslení.

Hallovo spektrální nakreslení:

Nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n = 0$ jsou vlastní čísla L_G ,
 pro souvislý graf

a nechť $u_1, \dots, u_n$ jsou příslušné vlastní vektory.

Obecný graf lze nakreslit umístěním vrcholů na (u_{n-1}, u_{n-2})
 a nakreslením hran rovnými čarami.

Proč to dává smysl?

$L_G u_{n-1} = \lambda_{n-1} u_{n-1}$,
 $L_G u_{n-2} = \lambda_{n-2} u_{n-2}$.
 Pokud je $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}$ malé, je pravá strana blízká 0, tedy většina vrcholů je blízko těžiště.

Matice sousednosti grafu:

Uvažme $A_G^k e_i$, mocniny propagují jedničku v grafu.

$(A_G^k e_i)_j = (A_G^k)_{ij}$ je počet sledů mezi i a j délky k .

Například můžeme určit centrum grafu jako vrcholy,

co maximalizují diagonálu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_G^k}{k!} = e^{A_G}$.
 dělíme, aby to nebylo moc velké
 V centru jsou vrcholy, co mají nejvíc sledů $i \rightarrow i$.

Lze využít k modelování náhodných procházek.

Pravděpodobnost je určena k modelování složitěho reálného světa. Například hod kostky neumíme předpovědět, ale lze udělat model: $1/6$ na každou hodnotu.
 Proznáší statistické chování kostky.

52 Náhodná procházka popis pohyb v části.
 Necht' P_G vznikne z A_G vydělením každého sloupce pomocí $\deg(i)$.

Pravděpodobnostní distribuce: $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1$.

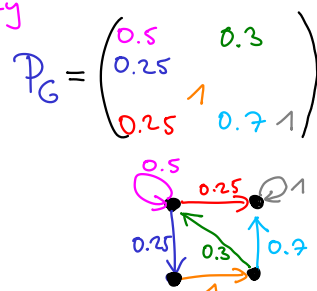
Systém lineárních diferencií:

x_0 ... počáteční distribuce,
 třeba e_i ,

$$x_k = P_G x_{k-1} = P_G^k x_0.$$

krok náhodné procházky

Místo grafu můžeme uvažovat i obecný
Markovský proces P_G , což je nezáporná
 matice se součty 1 ve všech sloupcích.



Předpokládejme, že existuje báze z vlastních vektorů
 $y_1, \dots, y_n$ s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, že $x_0 = \sum \alpha_i y_i$.
 Již víme, že $x_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k y_i$.

Chceme analyzovat $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} P_G^k x_0$. Podle Gershgorinovy
 věty (aplikované na sloupce) víme, že $|\lambda_i| \leq 1$, a vždy
 existuje y_1 , že $\lambda_1 = 1$. Pro jednoduchost se zaměříme
 na d-regulární grafy, potom $P_G = \frac{1}{d} A_G$ je symetrická.

Tedy $\lambda_i \in [-1, 1]$ a necht' $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ a $y_1 = \mathbf{1}$.
 vektor jedniček

Obecně konvergence $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k z$ závisí na spektrálním radiu
 $\rho(A) = \max |\lambda_i|$.

$$\begin{aligned} \rho(A) < 1 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k z = 0 \\ \rho(A) = 1 &\Rightarrow \text{složitě chováni} \\ &\quad (\text{konvergence, oscilace}) \\ \rho(A) > 1 &\Rightarrow \text{divergence} \end{aligned}$$

Pokud $\lambda_2 < 1, \lambda_n > -1$
 (když je G souvislý
 ne bipartitní), potom

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_G^k x_0 = y_1.$$

v sumě $\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k y_i$ převládne první člen

Schurův a spektrální rozklad matice

Připomeňme algebraickou motivaci:

Podobnost: stejné lineární zobrazení vůči různým bázím,

$$A = SBS^{-1} \quad \leftarrow \text{chceme najít co nejjednodušší matici } B$$

Víme, že B je diagonální, právě když existuje báze S z vlastních vektorů.

① Jaký je nejjednodušší tvar, když taková báze neexistuje?

• Jordanova normální forma $A = SJS^{-1}$ ↖ přístě

• Schurův rozklad $A = QUQ^*$

ortogonální báze
(unitární)

■ horní
trojúhelníková

② Co když chceme extra podmínky? Třeba aby byla báze ortogonální. Kdy existuje?

• Uvedený Schurův rozklad existuje vždy.

• Spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$ existuje, právě když A je normální: $A^*A = AA^*$.

■ diagonální

Schurův rozklad

Věta: Pro libovolnou matici A existuje Schurův rozklad

$$A = QUQ^*$$

Důkaz: Chceme $AQ = QU$.

Nechť $Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ ↑
diagonála
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Budeme Q budovat postupně indukcí podle velikosti A .

54 Má platit, že

$$Aq_i = \lambda_i q_i + \sum_{j < i} u_{j,i} q_j.$$

Speciálně q_1 má být vlastní vektor A . Protože ten vždy existuje, zvolme jako q_1 libovolný vlastní vektor normy jedna.

Jak dál? Nemusí existovat vlastní vektor q_2 nezávislý na q_1 , navíc chceme kolmost.

Zatím ignorujeme a doplníme na libovolnou ortogonální bázi.

$$A \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & ? \\ 0 & \hat{U}_1 \\ | & | \end{bmatrix}$$

← Nejsou nuly, ale to je v pohodě.
← Musíme se zbavit nul pod diagonálou.

Nulové koeficienty z ortogonalit:

$$q_i^* A q_1 = \lambda_1 q_i^* q_1 = 0.$$

Protože $\hat{U}_1$ je menší matice $(n-1) \times (n-1)$, můžeme aplikovat indukční předpoklad a víme:

$$\hat{U}_1 = \hat{Q}_2 \hat{U} \hat{Q}_2^*, \text{ neboli } \begin{bmatrix} \lambda_1 & ? \\ 0 & \hat{U}_1 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & - & 0 & - \\ | & \hat{Q}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - & 0 & - \\ | & \hat{Q}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & ? \\ 0 & \hat{U} \\ | & | \end{bmatrix}$$

Schurův rozklad

$$A \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & - & 0 & - \\ | & \hat{Q}_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ q_1 & ? \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & - & 0 & - \\ | & \hat{Q}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & ? & \dots & ? \\ 0 & \lambda_2 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

tedy $Q = Q_1 Q_2$ a $A = Q U Q^*$.

□

Geometrická interpretace

Každé lineární zobrazení lze rozložit na natahování, rotace ($\lambda_i \notin \mathbb{R}$) a kosení $x_i \mapsto x_i + x_j$, kde $j < i$.

Normalita

Matice A je normální, pokud $A^*A = AA^*$. To je hluboké geometrická vlastnost, neboť komutuje s transpozicí (duální zobrazení).

SS

← vypadá podezřele =)

Nechť $r_1, \dots, r_n$ jsou řádky A a $s_1, \dots, s_n$ sloupce A .

Potom z normality platí:

$$(A^*A)_{ij} = s_i^* s_j = r_i^* r_j = (AA^*)_{ij}, \text{ speciálně } \|r_i\| = \|s_i\|.$$

↑ normální matice mají stejné úhly a délky řádkových a sloupcových vektorů

Spektrální rozklad

Věta: Pro matici A existuje spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^*,$$

právě když A je normální.

Důkaz: " $\Rightarrow$ ": Pokud $A = Q \Lambda Q^*$, potom $A^* = Q \Lambda^* Q^*$.

$$A^*A = Q \Lambda^* Q^* Q \Lambda Q^* = Q \underbrace{\Lambda^* \Lambda}_{\text{komutuje}} Q^* = Q \Lambda \Lambda^* Q^* = Q \Lambda Q^* Q \Lambda^* Q^* = A A^*.$$

" $\Leftarrow$ ": Uvažme Schurův rozklad $A = Q U Q^*$. Tvrdíme, že U je diagonální matice Λ .

$$A^* = Q U^* Q^*.$$

□, není to Schurův rozklad

Dokážeme ve dvou krocích:

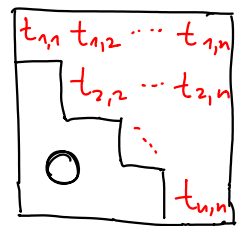
① U je normální.

$$\begin{aligned} U &= Q^* A Q, \\ U^* &= Q^* A^* Q. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{zbytek důkazu} \\ \text{jako výše, vynásobení} \\ \text{a normalita } A \end{array}$$

56 ② Pokud je trojúhelníková matice T normální,
potom je diagonální.

Vzpomeňme si, že $\|r_i\| = \|s_i\|$. Speciálně

$$\sqrt{t_{1,1}\overline{t_{1,1}}} = \|s_1\| = \|r_1\| = \sqrt{t_{1,1}\overline{t_{1,1}} + \dots + t_{1,n}\overline{t_{1,n}}},$$



tedy $t_{1,2}, \dots, t_{1,n} = 0$. Podobně další řádky a sloupce.

Tedy Schurův rozklad je spektrální a $A = Q \Lambda Q^*$. $\square$

Proč chceme najít ortogonální báze $q_1, \dots, q_n$ z
vlastních vektorů?

① Jednoduché vyjádření souřadnic $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i q_i$
pomocí $\alpha = Q^* x$.

② Lokální změna x uměrně změni souřadnice α .
Z toho plynou dobré numerické vlastnosti rozkladů.
Například Schurův rozklad je spojitý v koeficientech
matice A .

Nenormální matice a Jordanova normální forma

Dokážeme, že libovolnou matici lze skoro diagonalizovat.

Jordanova normální forma

Blokově diagonální matice J .

Každý blok je Jordanova buňka

$$J_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ nějaké velikosti } k \times k.$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & & & \\ & J_{\lambda_2} & & & \\ & & J_{\lambda_3} & & \\ & & & J_{\lambda_4} & \\ & & & & J_{\lambda_5} & \\ & & & & & J_{\lambda_6} \end{pmatrix}$$

Věta: Pro libovolnou matici existuje Jordanova forma

$$A = SJS^{-1}.$$

Sloupce matice S obsahují zobecněné vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Označme vlastní čísla na diagonále $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Z $AS = SJ$ vyplývá, že

$$Ax_i = \begin{cases} \lambda_i x_i, & \text{pokud začíná Jordanova buňka,} \\ \lambda_i x_i + x_{i-1}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$\leftarrow x_i$ je vlastní vektor
 $\leftarrow x_i$ je zobecněný vlastní vektor
 $\hookrightarrow$ tvoří řetězky navěšené na vlastní vektory

Rozklad popisuje A vůči jiné bázi jako kombinaci natahování a rotací (vlastní vektory) a kosení (zobecněné vlastní vektory).

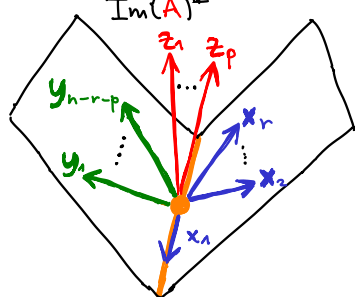
Důkaz: Budeme nejprve předpokládat, že A je singulární. Označme

$$\dim \text{Im}(A) = r < n, \quad \dim \text{Ker}(A) = n - r > 0,$$

$\leftarrow$ oba v $\mathbb{C}^n$

$$\dim \text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A) = p.$$

[58] $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)^\perp$ $\text{Im}(A)$



$\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$

① $\text{Im}(A)$ je invariantní podprostor matice A : $\forall x \in \text{Im}(A) \quad Ax \in \text{Im}(A)$

Proto $B = A|_{\text{Im}(A)}$ je lineární zobrazení $\text{Im}(A) \rightarrow \text{Im}(A)$, a proto je reprezentované maticí $r \times r$.

Z indukčního předpokladu existuje Jordanova forma B s bází $x_1, \dots, x_r \in \text{Im}(A)$ ze zobecněných vlastních vektorů B (také A). Tedy $Ax_i = \begin{cases} \lambda_i x_i, \\ \lambda_i x_i + x_{i-1}. \end{cases}$ nebo Musíme je doplnit na bázi.

② Každý vektor z $\text{Ker}(A)$ je vlastní vektor A .

Zvolme v $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)^\perp$ libovolnou bázi $y_1, \dots, y_{n-r-p}$.

Tyto vektory jsou určité lineárně nezávislé s $x_1, \dots, x_r$.

③ Chybí nalézt p dalších zobecněných vlastních vektorů, bohužel je nelze zvolit z $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$ kvůli nezávislosti s $x_1, \dots, x_r$. Musíme konečně něco udělat.

Platí, že p vektorů z $x_1, \dots, x_r$ leží v $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$.

Proč? Obecně, pokud $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = k$, libovolná báze zobecněných vlastních vektorů obsahuje k vlastních vektorů z $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Můžeme toto přidat jako indukční předpoklad, konstrukce y_i to zachová. Platí, že $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$. Pokud výše uvedený postup aplikujeme na B , obsahují vektory $x_1, \dots, x_r$ bázi $\text{Ker}(B)$.

Tedy mezi $x_1, \dots, x_r$ nalezneme p řetězek začínajících v $\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(A)$, odpovídající buňkám J_0 . Nechť x_j je poslední vektor i -tého řetězku. Protože $x_j \in \text{Im}(A)$, zvolme z_i jako jeho libovolný vzor: $Az_i = x_j$.

Volbou $z_1, \dots, z_p$ jsme jednotlivé řetězky prodloužili [59] o jedna, tedy tato část důkazu vytváří netriviální Jordanovy buňky.

Zjevně $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r-p}, z_1, \dots, z_p$ jsou zobecněné vlastní vektory.

Zbývá dokázat jejich nezávislost:

$$0 = \sum_{i \in \text{Im}(A)} \alpha_i x_i + \sum_{i \in \text{Ker}(A)} \beta_i y_i + \sum_{i \in \mathbb{C}^n} \gamma_i z_i.$$

vynásobme A zleva
(neekvivalentní úprava)

$$0 = \sum \alpha_i A x_i + \sum \beta_i A y_i + \sum \gamma_i A z_i =$$

$$= \sum \alpha_i \begin{cases} \lambda_i x_i \\ \lambda_i x_i + x_{i-1} \end{cases} + 0 + \sum \gamma_i x_j.$$

↑
přes konce řetězku J_0

← Tyto vektory x_j se nikde neobjevují na levé straně, protože $A x_j = 0$ nebo x_{j-1} .

Protože $x_1, \dots, x_r$ jsou lineárně nezávislé, jsou $\gamma_i = 0$. To ale ještě nevíme o α_i , protože některé x_i se objevují vlevo dvakrát. Obrazy $A x_i$ mohou být závislé.
Vratíme se zpět:

$$0 = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_i y_i + \sum 0 z_i = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_i y_i.$$

Avšak y_i jsme volili tak, aby byly nezávislé s x_i . Proto $\alpha_i = 0$ a $\beta_i = 0$.

Co když je A regulární?

Pro každou matici existuje vlastní číslo λ , pro které $A - \lambda I$ je singulární. Pro ní podle důkazu existuje Jordanova normální forma: vytváří netriviální buňky J_λ .

$$A - \lambda I = S J S^{-1} \Rightarrow S(J + \lambda I) S^{-1} = A - \lambda I + \lambda I = A.$$

Tedy $S(J + \lambda I) S^{-1}$ je Jordanova normální forma A . □

60 Poznámky k větě:

- Pokud důkaz aplikujeme na symetrickou matici $A=A^*$, je $\text{Im}(A) = \mathcal{Q}^*(A)$, což je to ortogonální doplněk $\text{Ker}(A)$. Tedy $p=0$ a řetězky se neprodlužují. Stačí dokázat, že $B=A \upharpoonright \text{Im}(A)$ je symetrická matice:

B^* je jediná matice, že $\langle Bx|y \rangle = \langle x|B^*y \rangle$, $\forall x,y \in \text{Im}(A)$.

↑ symetrie se přenesla z A

Proto $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_{n-r}$ tvoří bázi z vlastních vektorů, která je snadno ortogonální. To je spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^*.$$

- V důkazu vůbec nepotřebujeme determinant, stačí existence jednoho vlastního čísla na konci důkazu.

Nechť λ_i je vlastní číslo:

- geometrická násobnost d_i : $\dim \text{Ker}(A - \lambda_i I)$, což je počet nezávislých vlastních vektorů. Také je to počet Jordanových buněk J_{λ_i} .
- algebraická násobnost $\mathcal{B}_i$: součet velikostí J_{λ_i} , dimenze podprostoru generovaného zobecněnými vlastními vektory čísla λ_i .

Platí $d_i \leq \mathcal{B}_i$ a $\mathcal{B}_1 + \dots + \mathcal{B}_k = n$.

↑ protože zobecněné vlastní vektory tvoří bázi

Determinant tedy vůbec nepotřebujeme pro vlastní čísla, lze budovat teorii bez něj. Můžeme definovat

$$\det(A) = \prod \lambda_i^{\mathcal{B}_i}.$$

- Minimální polynom $M_A(x) = \prod (x - \lambda_i)^{\gamma_i}$ ← velikost největší buňky λ_i , $\gamma_i \leq \beta_i$.
- Charakteristický polynom $P_A(x) = \prod (x - \lambda_i)^{\beta_i}$

M_A je polynom $x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \dots + a_0$ nejmenšího stupně l , že platí $M_A(A) = 0$. M_A je důležitý strukturálně. Platí, že pokud $P(A) = 0$, potom M_A dělí polynom P .

Hierarchie matic podle vlastních čísel

Srovnáme matice podle toho, jak je umíme pochopit z vlastních čísel.

matice	vlastní čísla	víme o nich
symetrické pozitivně definitní	$\lambda_i \geq 0$	Další specifické vlastnosti, <u>více později</u> .
symetrické $A = A^*$	$\lambda_i \in \mathbb{R}$	Stačí <u>pouze natahování</u> , <u>žádné rotace</u> .
normální $A^*A = AA^*$	spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^*$	Vlastní číslo <u>poví</u> o matici <u>strukturálně</u> <u>vše</u> , stačí $\text{Sp}(A)$.
nenormální $A^*A \neq AA^*$	Jordanova forma $A = SJS^{-1}$	Vlastní čísla neřeknou moc i pro diagonalizaci, musíme znát úhly mezi vlastními vektory.

Jak analyzovat nenormální matice?

Moc se to neumí, dnes aktivní výzkum.

Dvě zobecnění $\text{Sp}(A)$:

pseudospektrum a numerický rozsah.

62 Numerický rozsah:

Pokud $Ax = \lambda x$, potom

$$\frac{x^* Ax}{x^* x} = \lambda.$$

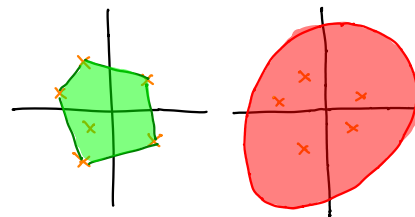
Rayleyho kvocient

Toto lze použít k definici numerického rozsahu:

$$W(A) = \left\{ \frac{x^* Ax}{x^* x} : x \neq 0 \right\} = \{x^* Ax : \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}.$$

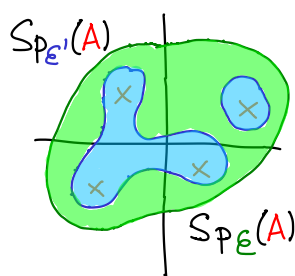
$W(A)$ je vždy konvexní a obsahuje vlastní čísla.

Pro normální matici je to konvexní obal vlastních čísel, pro nenormální matice je větší.



Pseudospektrum:

$$Sp_\epsilon(A) = \{ \lambda : \lambda \text{ je vlastní číslo } A+E, \|E\| \leq \epsilon \}.$$



$$0 < \epsilon' < \epsilon$$

$$Sp_{\epsilon'}(A) \subseteq Sp_\epsilon(A).$$

Jak moc se $\uparrow$ změní vlastní čísla malou perturbací (kde $\|E\|$ je operátorová norma matice).

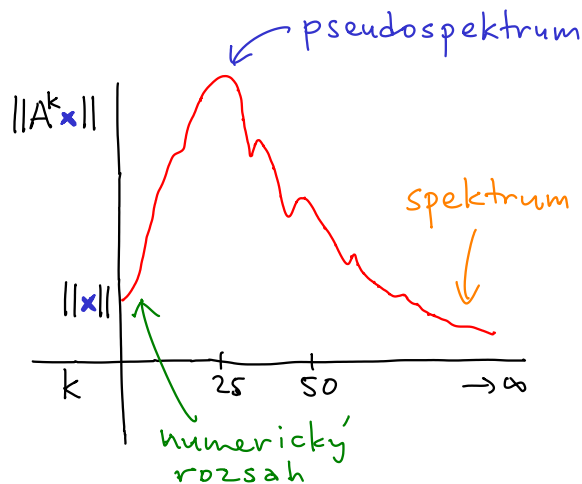
Příklad:

spektrální radius $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$

Pokud $\rho(A) < 1$, víme, že $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0$.

Ale pokud je A nenormální, třeba $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 10^5 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$, může konvergence dlouho trvat.

$$A^{25} \approx \begin{pmatrix} 0.07 & 2 \cdot 10^5 \\ 0 & 0.07 \end{pmatrix}, \text{ tedy } \|A^{25} x\| > \|x\|.$$



Nelze analyzovat začátek jen z vlastních čísel, prozradí pouze asymptotické chování.

Fourierova transformace v řeči lineární algebry

Fourierova řada

Mějme 2π -periodickou funkci $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

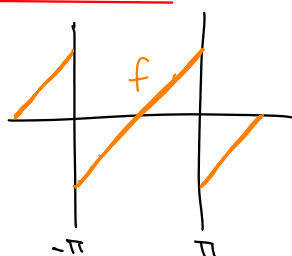
konkrétní hodnota periody není klíčová

Za určitých podmínek (docela složité) lze zapsat f jako součet řady:

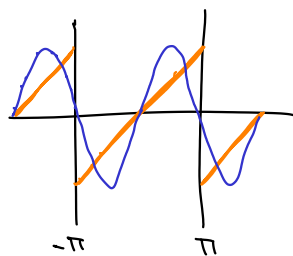
$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Příklad:

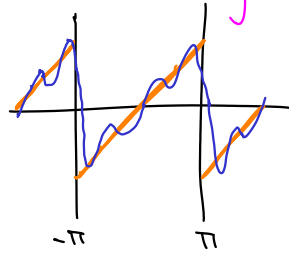
částečné součty řady



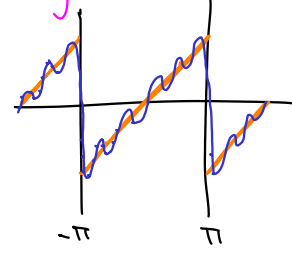
funkce pila



$k=1$



$k=3$



$k=5$

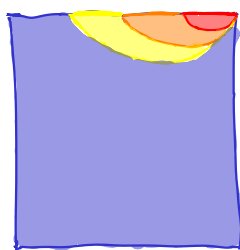
Motivace

Funkci f lze rozložit na vlny, koeficienty a_k, b_k jsou amplitudy. Důležité pro analýzu signálů.

Fourierova motivace byla pro řešení diferenciálních rovnic.

Rovnice tepla $\frac{\partial h}{\partial t} = -\Delta h$ ve 2D. Chceme equilibrium

$\Delta h = 0$ s okrajovými podmínkami.



hodnoty na okraji předepsané, odpovídají zdroji tepla, uvnitř chceme teploty zprůměrovat

Znaly se řešení, pokud byly zdroje tepla $\sin y$ a $\cos y$. Fourier vymyslel, že tato řešení jde sečíst pro obecný zdroj f .

Například na čtverci $[0; \pi] \times [0; \pi]$,

kde nahoře rostou teploty lineárně

$h(x, \pi) = x$, jinde na hranici nuly:

$$h(x, y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) \frac{\sinh(ky)}{\sinh(k\pi)}.$$

neexistuje jednodušší forma

64 Uvažme jednodušší problém:

$\frac{d^2 y}{dx^2} = f$, to je soustava lineárních rovnic $\frac{d^2}{dx^2} y = f$ lineární operátor pravá strana

To odpovídá $Ax = b$ na prostoru funkcí. Protože má nekonečnou dimenzi, nejde aplikovat Gaussovku.

Kdyby b byl vlastní vektor A , potom hned víme, že $x = \frac{b}{\lambda}$.

Nechť $y_1, \dots, y_n$ je báze z vlastních vektorů,

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou jejich vlastní čísla.

$Ax = b$ lze řešit ve dvou krocích:

① Vyjádříme $b = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$.

② Získáme řešení $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{y_i}{\lambda_i}$.

Jak to pomůže v řešení $\frac{d^2}{dx^2} y = f$?

Funkce $\cos(kx)$ a $\sin(kx)$ jsou vlastní vektory $\frac{d^2}{dx^2}$, někdy se jim říká vlastní funkce:

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos(kx) = -k^2 \cos(kx), \quad \frac{d^2}{dx^2} \sin(kx) = -k^2 \sin(kx).$$

Tedy pokud $f \in \langle \frac{1}{2}, \cos(kx), \sin(kx) : k \geq 1 \rangle$, lze využít ② a nalézt funkci y .

Z tohoto důvodu je klíčové zkoumat vlastní funkce a čísla operátorů derivace a dalších. ← klíčové téma funkcionální analýzy

• Třeba vlastní funkce $\frac{d}{dx}$ jsou exponenciely $e^{\lambda x}$, neboť

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Dále $\frac{d}{dx} x^k e^{\lambda x} = \lambda x^k e^{\lambda x} + k x^{k-1} e^{\lambda x}$, to jsou řetízky v Jordanově normální formě. Proto se exponenciely tak často objevují při řešení diferenciálních rovnic.

Tím tedy lze aplikovat ②, za předpokladu, že umíme 65
vyjádřit $\mathbf{b} = \sum \alpha_i \mathbf{y}_i$ v kroku ①, což vede na $\mathbf{Y}\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Pro nekonečně mnoho dimenzí by to byla soustava integrálních rovnic, nevíme jak řešit.

Druhá klíčová vlastnost Fourierovy řady: ortogonalita

Uvažme standardní skalární součin $\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$.

Funkce $\frac{1}{2}$, $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ jsou ortogonální, neboť

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(\ell x) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx = 0, \quad \text{a další.}$$

$k \neq \ell$

↑ výpočet je standardní pomocí per partes

Dále $\|\cos(kx)\| = \|\sin(kx)\| = \sqrt{\pi}$.

Proto lze koeficienty $\sum \alpha_i \mathbf{y}_i$, tedy a_k a b_k , určit pomocí kolmých projekcí na osy $\alpha = \frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle}$.

$$a_k = \frac{\langle f | \cos(kx) \rangle}{\|\cos(kx)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Fourierova báze $\frac{1}{2}$, $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ je ortogonální báze z vlastních vektorů operátoru $\frac{d}{dx^2}$.

↑ Pojem báze je v nekonečně dimenzích složitý, musí se řešit druh konvergence (bodová, stejnosměrná), existence limity, pouze na určitých podprostorech.

Fourierova transformace je přechod do Fourierovy báze.

Lze volit i jiné podobné báze, studuje harmonická analýza.

Spojitá: $\{e^{-2\pi i x \xi} : \xi \in \mathbb{R}\}$, diskrétní: $\{e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} : 0 \leq k < N\}$.

↑ Transformace $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, rychlá!

66 Ukažme na závěr jednoduchou teoretickou aplikaci Fourierovy řady na řešení basilejského problému:

Víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c}$ konverguje, právě když $c > 1$.

Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, ← harmonická řada diverguje

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ← basilejský problém

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \notin \mathbb{Q}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} = ?$, ...
 ↑ není známo přesně všechny sudé mocniny lze řešit podobně ↑ není známo

Lemma: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Důkaz: Použijeme Fourierovu řadu funkce pila

$f(x) = x$ pro $x \in (-\pi; \pi]$.



$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(kx) dx = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx) dx = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

↑ lichá funkce na symetrickém intervalu ↑ snadný výpočet integrálu

Nyní aplikujeme Pythagorovu větu:

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \|\sin(kx)\|^2. \quad \leftarrow \text{pro nekonečně mnoho dimenzí}$$

Levá strana: $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^3.$

Pravá strana: $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 \underbrace{\|\sin(kx)\|^2}_{\pi} = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$
 ↑ $\frac{4}{k^2}$

Proto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

□

Pozitivně definitní matice: extrém a energie

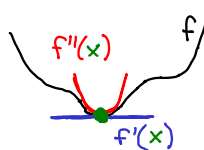
Hledání extrémů funkcí

Pro jednu proměnnou lze použít derivace.

Kandidáti: Body x s $f'(x) = 0$.

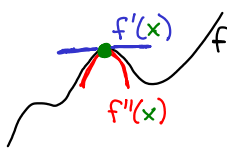
Test pomocí druhých derivací:

$$f''(x) > 0$$



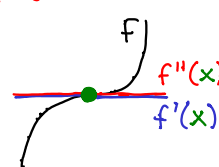
lokální minimum

$$f''(x) < 0$$



lokální maximum

$$f''(x) = 0$$



nevíme, může být inflexní bod, nebo extrém: x^3 vs. x^4 .

Můžeme derivovat dál a dozvědět se.

Proč to funguje? Derivace popisují nejlepší lokální aproximace polynomelem. Tento polynom se nazývá Taylorův polynom.

BÚNO $x=0$:

$$T_f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

na extrém
nemá vliv

lokálně převládne první nenulový člen $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

k liché:
inflexní bod,

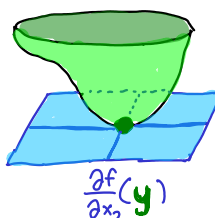
k sudé:
extrém, podle znaménka.

Hledání extrémů funkcí více proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$

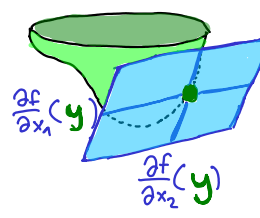
Opět lze použít parciální derivace, ale je to trochu složitější.

① přiložíme tečnou rovinu

Kandidáti: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}) = 0$.
 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$



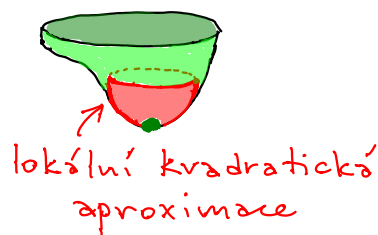
kandidát



není extrém

68 (2) přiložíme tečný kvadratický polynom

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j = \sum_i \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i^2} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 f(\mathbf{y})}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j.$$



Zajímá nás lokální chování $P(\mathbf{x})$, stejně jako globální chování.

Možnosti:

$P(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$ pozitivně definitní

lokální minimum

$P(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq 0$ negativně definitní

lokální maximum

$P(\mathbf{x}) \geq 0$ pozitivně semidefinitní

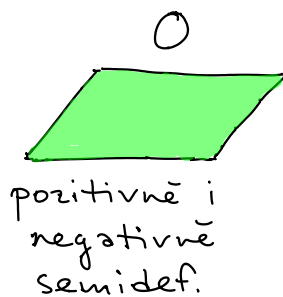
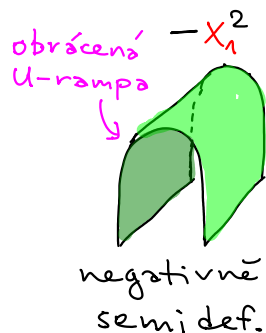
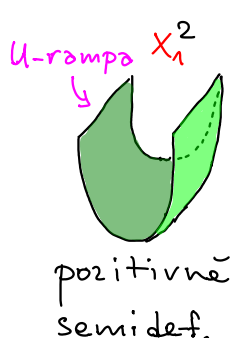
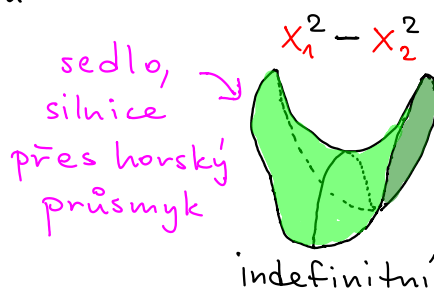
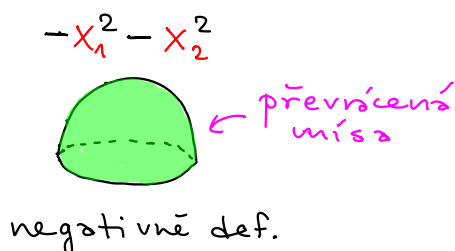
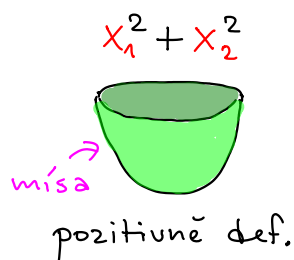
$P(\mathbf{x}) \leq 0$ negativně semidefinitní

} nevíme, derivace vyšších řádů

$\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad P(\mathbf{x}) < 0, P(\mathbf{y}) > 0$ indefinitní

není extrém

Příklady $P(x_1, x_2)$: existuje šest typů



Všechno pro dvě proměnné, podle Sylvesterovy věty.

Třeba $P(x_1, x_2) = x_1 x_2$ je sedlo otočené o 45° .

Jak ale zjistit typ daného

polynomu? Pomocí technik lineární algebry.

Ostatně hodně jí vzniklo jako nástroje analýzy.

Mějme $P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$. Necht' a_{ij} jsou koeficienty 69
matice A. Potom

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}. \quad \leftarrow \text{kvadratická forma } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Budeme předpokládat, že A je symetrická, tedy

$$P(\mathbf{x}) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j.$$

Definujme:

- A je pozitivně definitní (SPD), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- A je negativně definitní (SND), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- A je pozitivně semidefinitní (PSD), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$.
- A je negativně semidefinitní (NSD), pokud $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0$.
- A je indefinitní (ID) jinak: $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0, \mathbf{y}^T A \mathbf{y} > 0$.

Typ matice lze efektivně rozpoznat, řada kritérií.

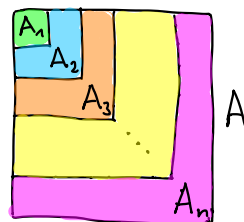
Zaměřme se na pozitivně definitní matice, zkuste si rozmyslet odlišnosti pro negativně def. a semidef.

Šest ekvivalentních definic pozitivní definitnosti

- ① $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
- ② vlastní čísla $\lambda_i > 0$,
- ③ determinanty principiálních minorů jsou kladné:

$$\det(A_1) > 0, \dots, \det(A_n) > 0.$$

Principiální minor A_k je podmatice $k \times k$ v levém horním rohu.



- ④ Gaussovu eliminaci lze provést bez prohazování a násobení řádků a má všechny pivoty $\phi_i > 0$.
- ⑤ Existuje R regulární, že $A = R^T R$.
- ⑥ $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ je skalární součin a $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}$ je norma.

70) Dokažme co nejvíc implikací:

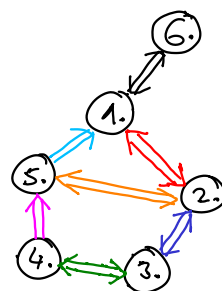
① $\Leftrightarrow$ ⑥ Dokázáno ve 2. cvičení.

① $\Rightarrow$ ②

že symetrie jsou všechna vlastní čísla
a vektory reálné. Pokud $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, potom

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} > 0, \text{ neboť } A \text{ je SPD} \quad \text{Proto } \lambda > 0.$$

$> 0, \text{ neboť } \|\mathbf{x}\|^2$



□

① $\Leftarrow$ ②

že symetrie existuje spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^T$.

Nechť $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ je ortogonální báze z vlastních vektorů.

Pokud $\mathbf{x} = \sum \alpha_i \mathbf{q}_i$, potom:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} &= (\sum \alpha_i \mathbf{q}_i)^T A (\sum \alpha_j \mathbf{q}_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \mathbf{q}_i^T A \mathbf{q}_j = \sum_{i,j} \lambda_j \alpha_i \alpha_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \\ &= \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2 > 0. \end{aligned}$$

> 0 z předpokladu ≥ 0 a alespoň jedno kladné □

Věta (o proplétání vlastních čísel)

Nechť A je symetrická a B vznikne z A vyškrtnutím
 i -tého řádku a sloupce. Pokud $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní
čísla A a $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ vlastní čísla B . Potom:

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3 \geq \mu_3 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+1}$$

$$\text{Sp}(A) \quad 0 \quad \text{Sp}(B)$$

Důkaz příště, teď aplikujme.

② $\Rightarrow$ ③

Podle věty o proplétání jsou vlastní čísla všech minorů

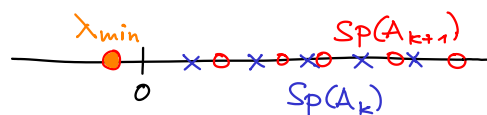
A_k mezi λ_1 a λ_n , tedy jsou kladná. Proto $\det(A_k) > 0$. □

② $\Leftarrow$ ③

Postupujeme indukcí. Protože $\det(A_1) > 0$, je vlastní číslo

kladné. Pokud A_k má kladná vlastní čísla, A_{k+1} by mohlo

mít podle věty o proplétání
nejvýše jedno nekladné vlastní
číslo $\lambda_{\min}$. Potom by však



$\det(A_{k+1}) \leq 0$, což je spor. □

③ $\Rightarrow$ ④

Protože $\det(A_k) > 0$, jsou podmatice $A_1, \dots, A_n$ regulární. Proto lze provádět Gaussovu eliminaci bez prohazování řádků.
Úpravy nemění determinant, proto $\det(A_k) = \prod_{i=1}^k p_i$. Proto

$$p_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A_{k-1})} > 0.$$

③ $\Leftarrow$ ④

Gaussova eliminace nemění determinant žádné podmatice A_k , tedy $\det(A_k) = \prod_{i=1}^k p_i > 0$. □

④ $\Rightarrow$ ⑤

Lze získat přímo, ale uvažme LDU dekompozici:

$$A = \underset{\substack{\text{matice úprav} \\ \text{kladná} \\ \text{diagonála} \\ \text{s pivoty } p_i}}{L} \underset{\substack{\text{odstupňovaný tvar} \\ \text{ze symetrie}}}{D} U = U^T D U.$$

Protože $\exists \sqrt{D}$ s diagonálou $\sqrt{p_i}$, položíme $R = \sqrt{D} U$. $A = R^T R$, navíc R je $\blacksquare$ a $R^T R$ se nazývá Choleského rozklad. □

⑤ $\Rightarrow$ ①

Dosadíme $R^T R$ za A :

$$x^T A x = x^T R^T R x = (R x)^T (R x) = \|R x\|^2 = \|x\|_A^2 > 0.$$

Kvadratická forma s pozitivně definitní maticí určuje čtverec nějaké normy. □

② $\Rightarrow$ ⑤

Uvažme spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^T$. Protože Λ má kladnou

72 diagonálu, existuje $\sqrt{A}$ s diagonálou $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$.

Potom $R = \sqrt{A} Q^T$ a $A = R^T R$. □

② $\Leftarrow$ ⑤

Nechť $Ax = \lambda x$, potom $\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\|R x\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|x\|_A^2}{\|x\|^2} > 0$,

neboť je to podíl čtverců norem. □

Proč jsou pozitivně definitní matice tak důležité?

Dva dobré důvody:

① Propojují celou lineární algebru. Proto mají speciální vlastnosti a řada problému je pro ně mnohem jednodušších ($Ax = b$, $Ax = \lambda x$).

② Pozitivně definitní matice se často objevují.
Ve statistice kovarianční matice lineárních závislostí.
Ve fyzice se používají k modelování energie.
Například systém pružin z 9. cvičení má potenciální energii $x^T L_G x = \sum_{i,j \in E} (x_i - x_j)^2$.

Věta: Nechť A je pozitivně definitní. Potom

$$x \text{ minimalizuje } x^T A x - x^T b \Leftrightarrow Ax = b.$$

minimalizace energie

za podmínek

Na tomto je právě založen Tutterho postup.

Sylvestrova věta o setrvačnosti a minimaxová věta

Chceme pochopit strukturu libovolné kvadratické formy $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$. To je snadné pro A diagonální: $\sum a_{ii} x_i^2$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = \frac{1}{2}(\underbrace{x_1 + x_2}_{y_1})^2 + \frac{3}{2}(\underbrace{x_1 - x_2}_{y_2})^2 = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 3/2 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Tedy A je SPD.

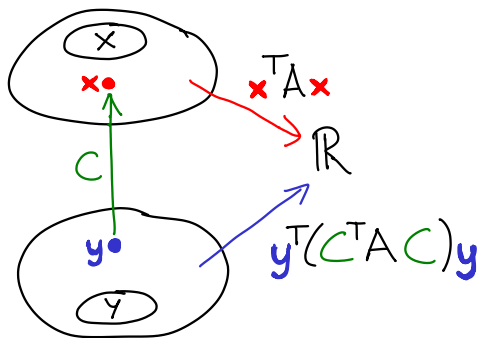
↑ Vhodnou substitucí jsme získali diagonální formu.

Substituce aneb přechod do jiné báze

Nechť $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$, kde C je regulární matice.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{C} \mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}.$$

Tedy A a $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ reprezentují stejnou kvadratickou formu vůči různým bázím.



Def: A je kongruentní s B, značeno

$A \sim B$, pokud $\exists \mathbf{C}$ regulární:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}.$$

Obdoba podobnosti: $\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}.$

Kongruence má třídy ekvivalence, které odpovídají rozdílným kvadratickým formám. Elegantně je charakterizuje Sylvestrova věta o setrvačnosti:

Věta: $A \sim B$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

↑ Tyto tři počty jsou signatura matice (n_+, n_-, n_0) .

74 Důkaz: Nejprve dokažme, že pokud A a B mají stejnou signaturu (n_+, n_-, n_0) , potom jsou kongruentní. Stačí ukázat, že $A \sim D$, kde D je diagonální matice

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1 \dots 1}_{n_+} & & \\ & \underbrace{-1 \dots -1}_{n_-} & \\ & & \underbrace{0 \dots 0}_{n_0} \end{pmatrix}$$

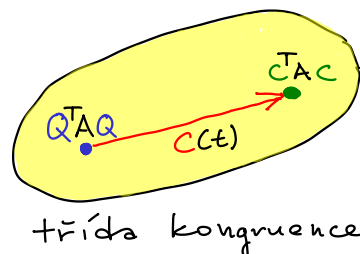
Protože A je symetrická matice, existuje spektrální rozklad $A = Q \Lambda Q^T$, seřadíme nejprve pozitivní vl. čísla, pak negativní, pak nulová. rovno 1 pro $\lambda_i = 0$

Zvolme diagonální $(\sqrt{\Lambda})_{ii} = \sqrt{|\lambda_i|}$, potom $\sqrt{\Lambda} D \sqrt{\Lambda}^T = \Lambda$, tedy $A = \underbrace{Q \sqrt{\Lambda}^T}_{C^T} D \underbrace{\sqrt{\Lambda} Q}_{C}$, tedy $A \sim D$.

Druhou implikaci dokážeme elegantním topologickým důkazem. Chceme dokázat, že A a $C^T A C$ mají stejnou signaturu. Předpokládejme, že A je regulární, jinak aplikujeme důkaz na $A + \epsilon I$, kde $\epsilon \rightarrow 0$.

Nechť Q je ortogonální matice.

Potom A a $Q^T A Q$ mají stejná vlastní čísla. ← není spektrální rozklad
← z podobnosti



trída kongruence

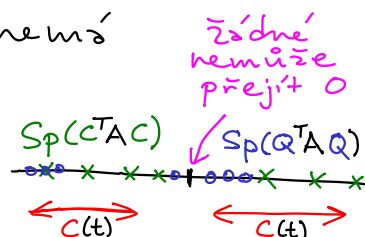
Nyní uvažme spojitou transformaci z $Q^T A Q$ na $C^T A C$:

$$C(t) = \underbrace{t C + (1-t) Q}_{\text{konvexní kombinace}}, \quad t \in [0, 1], \quad \text{tedy } C(0) = Q, \quad C(1) = C.$$

Klíčové: vlastní čísla $C(t)^T A C(t)$ se mění spojitě s t .

①. Předpokládejme, že $C(t)$ je regulární $\forall t \in [0, 1]$

Potom je i $C(t)^T A C(t)$ regulární, tedy nemá žádné nulové vlastní číslo. Ze spojitosti vlastní čísla nemohou změnit znaménko, tedy A a $C^T A C$ mají stejnou signaturu.



② Musíme vhodně zvolit ortogonální Q

Odvodíme z C , uvažme QR rozklad $C = QR$.

Víme, že R má kladnou diagonálu.

$$C(t) = tQR + (1-t)Q = Q(tR + (1-t)I).$$

regulární ↗

konvexní kombinace dvou

□ s kladnou diagonálou,

tedy má kladnou diagonálu
a je regulární. □

Proto je $C(t)$ regulární.

Pokud je A regulární, lze signaturu zjistit ze znamének pivotů: n_+ je počet kladných, n_- počet záporných.

Kolik je tříd kongruence pro matice $n \times n$? Snadným výpočtem je to $\binom{n+2}{2}$. ← počet voleb n_+, n_- , že $n_+ + n_- \leq n$

Pro $n=2$ je to 6, z minulého cvičení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geometrie tříd kongruence

Uvažme symetrické matice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

můžeme reprezentovat body v $\mathbb{R}^3$.

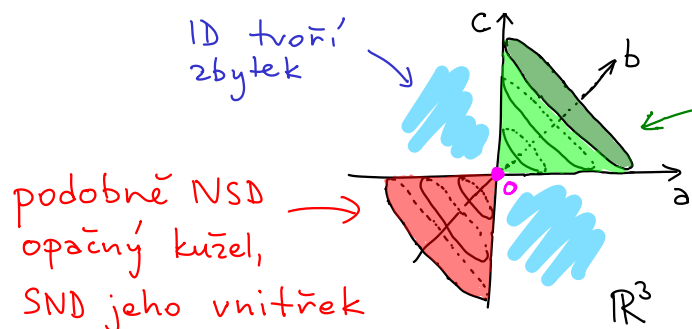
Jak geometricky vypadá množina SPD matic?

①. $a > 0, c > 0$

②. $\det(A) = ac - b^2 > 0$

určuje čtvrtprostor

lze udělat geometrické odvození,
které vynecháme



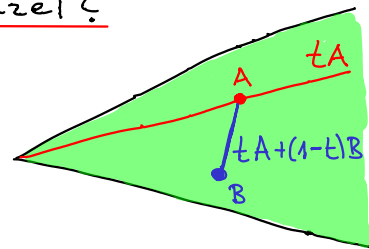
PSD tvoří kužel,
SPD jeho vnitřek

Podobně pro větší n ,
akorát těžké na představu.

76 Proč pozitivně definitní matice tvoří kužel?

Lemma: Necht' A, B jsou SPD. Potom

- (i) tA je SPD pro libovolné $t > 0$,
- (ii) $tA + (1-t)B$ je SPD, kde $t \in [0, 1]$.



Množina SPD matic je konvexní a uzavřená na paprsky.
PSD podobně, důkaz snadný přímo z definice.

Rayleyho kvocienty

Mějme symetrickou matici A s vlastními čísly

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ a vlastními vektory $y_1, \dots, y_n$. ← ortonormální báze

Potom $\lambda_i = y_i^T A y_i$. Označme $R_A(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$, kde $x \neq 0$.

Rayleyho kvocient $\uparrow$ pouze normování
chování kvadratické

Necht' $x = \sum \alpha_i y_i$, potom formy na jednotkové sféře

$$R_A(x) = \frac{\sum \alpha_i^2 \lambda_i y_i^T y_i}{\sum \alpha_i^2 y_i^T y_i} = \frac{\sum \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum \alpha_i^2}.$$

Pozorování: $\max_{x \neq 0} R_A(x) = \lambda_1, \min_{x \neq 0} R_A(x) = \lambda_n$.

Důkaz: Necht' $\|x\| = 1$, tedy $|\alpha_i| \leq 1$ a $\sum \alpha_i^2 = 1$. Potom je $\sum \alpha_i^2 \lambda_i$ maximalizováno pro $\alpha_1 = 1$, minimalizováno pro $\alpha_n = 1$. □

Courant-Fischerova minimaxová věta

Každé vlastní číslo λ_k lze popsat podobně:

Věta: Necht' A je symetrická matice. Potom

$$\lambda_k = \max_{\substack{U_k \\ \dim(U_k)=k}} \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in U_k}} R_A(x) = \min_{\substack{V_k \\ \dim(V_k)=n-k+1}} \max_{\substack{x \neq 0 \\ x \in V_k}} R_A(x).$$

Důkaz: Zaměřme se pouze na první rovnost, druhá se dokáže analogicky.

" $\geq \lambda_k$ ": Zvolme $U_k = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$, zbytek jako v důkazu pozorování, s minimalizací.

" $\leq \lambda_k$ ": Necht' U_k je libovolný podprostor dimenze k . □
 Zvolme $V_k = \langle y_k, \dots, y_n \rangle$ dimenze $n-k+1$. Proto $\exists x \neq 0$,
 že $x \in U_k \cap V_k$. Proto minimum v U_k je menší či rovno
 $R_A(x)$. Na druhou stranu pro V_k víme jako v pozorování,
 že $R_A(x) \leq \lambda_k$. □

Poznámka: V důkazu věty využíváme, že volba U_k/V_k
 je vlastní podprostor (uzavřen na obrazy v A). Proto
 $A|_{U_k}$ a $A|_{V_k}$ jsou symetrické matice a platí pozorování.

Tato věta má spíše teoretické důsledky, ne přímo
 určena k počítání. Ukažme jeden z nich:

Věta (o proplétání vlastních čísel)

Necht' A je symetrická a B vznikne z A vyškrtnutím
 i -tého řádku a sloupce. Pokud $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ jsou vlastní
 čísla A a $G_1, \dots, G_{n-1}$ vlastní čísla B . Potom:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \dots & & \lambda_n \\
 \Downarrow & \nearrow & \Downarrow & \nearrow & \Downarrow & \nearrow & \Downarrow & \nearrow & \Downarrow \\
 G_1 & & G_2 & & G_3 & & & & G_{n-1}
 \end{array}
 \qquad
 \lambda_i \geq G_i \geq \lambda_{i+1}$$

Důkaz: Bez újmy na obecnosti, necht' $i=n$, tedy v
 B je vyškrtnutý poslední řádek a sloupec. Potom
 $R_B(y) = R_A\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Necht' $W = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$.

- Protože U_k volíme pro B na podprostoru W , zjevně
 $\lambda_k \geq G_k$.
- Na druhou stranu necht' U_{k+1} definuje λ_{k+1} z věty.
 Proto $U_k = U_{k+1} \cap W$ je dimenze alespoň k , tedy

$$G_k \geq \min_{\substack{y \neq 0 \\ y \in U_k}} R_A(y) \geq \min_{\substack{x \neq 0 \\ x \in U_{k+1}}} R_A(x) = \lambda_{k+1}.$$

□

78 Pozitivně definitní matice a elipsoidy

Nechť A je pozitivně definitní matice, uvažme množinu

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A x = 1\}.$$

Pokud $A = I_n$, splňuje $\sum x_i^2 = 1$ n -rozměrná jednotková sféra S .

V případě diagonální matice $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ je to elipsoid s osami o délce $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ ve směru os kanonické báze.

A jak S vypadá obecně?

Uvažme spektrální rozklad

$$A = Q \Lambda Q^T,$$

tedy $x^T A x = 1$, pokud $(Q^T x) \Lambda (Q^T x) = 1$.

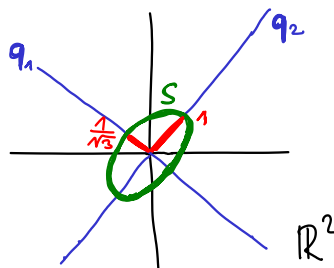
Nechť $q_1, \dots, q_n$ jsou vlastní vektory a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla.

Potom S je elipsoid ve směru vlastních vektorů o délkách $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ (což je kladné z pozitivní definitnosti).

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Připomeňme ze 2. cvičení, pozitivně definitní matice tvoří skalární součin / normu udanou těmito elipsoidy.

Literatura

Pavel Klavík: Povídání o lineární algebře

Pokrývá zimní semestr, pojmy jako vektorový prostor, matice, lineární zobrazení.

http://pavel.klavik.cz/vyuka/texty/povidani_o_la.html

Pavel Klavík: Přednáška Lineární algebra III

Navazující text, obsahuje například dekompozici podle singulárních hodnot, úvod do numerické lineární algebry, algoritmy na výpočet vlastních čísel.

<http://pavel.klavik.cz/vyuka/texty/la3.html>

Gilbert Strang: Linear Algebra and Its Applications

Skvělá úvodní kniha k lineární algebře, řada věcí na pokročilém cvičení je z ní inspirována.

James Demmel: Applied Numerical Linear Algebra

Kniha o praktickém počítání v lineární algebře, o vlivu zaokrouhlování a aplikací.