

1. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Opakování – matka moudrosti, sestra biflování

Optimalizační metody se zabývají studiem a aplikací lineárního programování. Než se do něj pustíme, bude se nám hodit oprášit znalosti z jiných předmětů, jako třeba:

Lineární algebra

PŘÍKLAD PRVNÍ Vyřešte Gauss-Jordanovou eliminací následující systém rovnic:

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z + w &= 0 \\2x + 4y + z + 2w &= 0 \\x + 2y - 2z + w &= 0 \\5z &= 0\end{aligned}$$

Řešení. Vyjde nám $z = 0$ a $x + 2y + w = 0$ ihned po dvou krocích.

PŘÍKLAD DRUHÝ Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic:

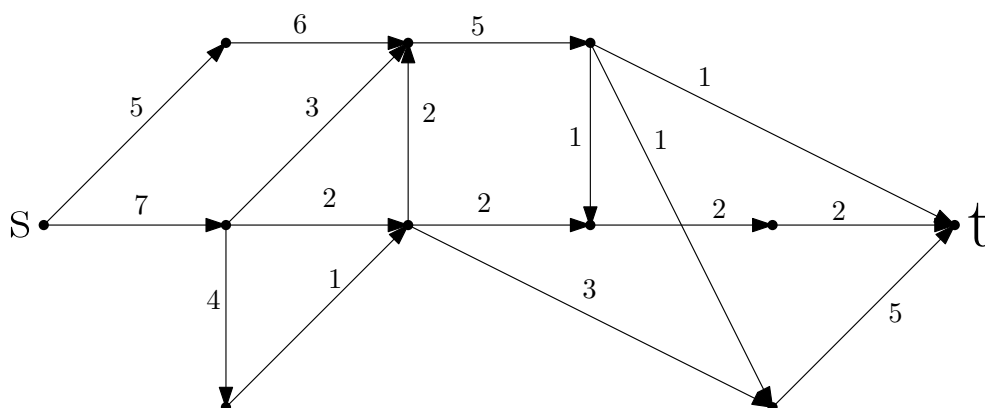
$$\begin{aligned}x + y + z &\geq 2 \\x + y + z &\leq 2 \\x + 2y - z &\leq 10 \\x &\geq 0 \\y &\geq 0 \\z &\geq 0\end{aligned}$$

Nalezněte speciálně ta řešení, která maximalizují proměnnou x , resp. y , resp. z .

Nápověda: Řešením grafickou metodou prostě myslíme „nakreslete množinu řešení určenou polorovninami na papír a rozhodněte, jestli je neprázdná (systém nemá řešení), jednobodová, omezená nebo neomezená.“ **Řešení.** Vyjde to tak, že celá kladná část nadroviny $x + y + z = 2$ je celá obsažená v polorovině $x + 2y - z \leq 10$ a tedy je jednoduché maximalizovat jednotlivé složky. Vždy vyjde $(2, 0, 0)$ a analogicky.

Algoritmy a datové struktury

PŘÍKLAD TŘETÍ Nalezněte minimální s, t -řez pro následující ohodnocený orientovaný graf:



Řešení. Využijí dualitu min- st -řez a max- st -tok jak to znají z KG I. najdu tok a řez velikosti 6.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Mějme problém VERTEX COVER, zadaný následovně:

Vstup: Neorientovaný graf G .

Hledáme: množinu vrcholů X takovou, že každá hrana $e \in E(G)$ má alespoň jeden koncový vrchol v množině X . Ze všech takových množin X hledáme tu co do velikosti minimální.

Nalezněte 2-aproximační algoritmus pro VERTEX COVER.

Řešení. Například vezmu maximální párování a dám oba koncové vrcholy do coveru. Všimnu si že optimální cover musí pokrývat, alespoň jednu partitu max párování a tedy nejhůře dvakrát tak špatné řešení. To, že je moje množina cover je jasné, pokud nepokrytá hrana, tak jsem měl najít větší párování.

Ve skutečnosti mi stačí libovolné maximální párování, protože беру oba vrcholy. Můžu to tedy udělat i hladově.

Kombinatorika a grafy

PŘÍKLAD PÁTÝ Mějme neohodnocený bipartitní graf G_1 a neohodnocený libovolný graf G_2 . Jakým algoritmem najdeme maximální párování v G_1 ? A v G_2 ? Zkuste si vzpomenout na rozumné algoritmy pro oba tyto problémy, a když se podaří, tak i na jejich složitost.

Řešení. Pro G_1 použiji toky, hledám maximální tok v grafu s přidaným univerzálním zdrojem a stokem. Kapacity všeho nastavím na 1. Proč to bude max párování? Tak kdyby existovalo větší párování, tak jsme oba vrcholy nepoužil a tedy umím vytvořit větší tok. Naopak tok mi popisuje párování, neboť přesně nasycené hrany v G_1 přes které tok prochází dám do párování a to nemohou být dvě sousedící. Musím dát ale pozor na celočíselnost. Tu zajistím například tak, že vždy vyrábím pouze nasycené vylepšující cesty. Triviální implementace bude tedy v čase $O(|E||V|)$. Jedna iterace projde max všechny hrany a iterací je max $|V|$, neb v každém kroku se zlepším alespoň o 1.

Koukal jsem jestli neexistuje lepší implementace a umí se dle wiky $O(|V|^{2.376})$ a pro řídké grafy $O(|E|^{\frac{10}{7}})$

Pro G_2 se umí Edmondsův kytičkový algoritmus. netriviální analýzou se získá čas $O(|E||V|^{\frac{1}{2}})$.

Formulace LP.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy. K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli. Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli. Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli. Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce. Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec, a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun. Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéct?

Řešení.

$$\begin{aligned} \max & 20x_c + 2x_h + 10x_b + 7x_k \\ 500x_c + 150x_h + 230x_b + 100x_k & \leq 5000 & // \text{ mouka} \\ 10x_c + 2x_h + 7x_b + x_k & \leq 125 & // \text{ vejce} \\ 50x_c + 10x_h + 15x_b & \leq 500 & // \text{ sůl} \\ \text{výsledek: } & x_b = 0, x_c = 0, x_h = 0, x_k = 50 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD SEDMÝ

Část 1. Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti, kupř. tento:

$$\begin{aligned}
5x + 3y &\leq 8 \\
2x - 5z &< -3 \\
6x + 5y + 2w &= 5 \\
3z + 2w &> 5 \\
x, y, z, w &\geq 0
\end{aligned}$$

Lze pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

Část 2. Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruuje „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

Řešení. Část 1. Přidáme proměnnou ε a tu maximalizujeme, čili $\max \varepsilon$ s.t.

$$\begin{aligned}
5x + 3y &\leq 8 \\
2x - 5z + \varepsilon &\leq -3 \\
6x + 5y + 2w &= 5 \\
3z + 2w - \varepsilon &\geq 5 \\
x, y, z, w, \varepsilon &\geq 0
\end{aligned}$$

Pokud soustava nemá řešení, řeknu, že ani původní neměla. Pokud soustava má optimální řešení s $\varepsilon = 0$, tak původní řešení také nemá. Jinak soustava řešení má.

Řešení vzorového příkladu podle Wolframů: $w = 5/2, x = 0, y = 0, z > 3/5$.

Část 2. $\max z$ s.t. $z < 1, z \geq 0$.

PŘÍKLAD OSMÝ Mějme LP v nestandardním tvaru: $\max c^T x$ takové, že $Ax \leq b$, ale $x \in \mathbb{R}^n$, ne pouze $x \geq 0$. Je možné tento program převést na ekvivalentní program ve standardním tvaru tj. $\max d^T x'$ takové, že $A'x' \leq b'$ a $x' \geq 0$?

Řešení. Použijeme pozitivní a negativní proměnné: $x^+ \geq 0$ a $x^- \geq 0$. Každý výskyt x nahradíme jedním výskytem $x^+ - x^-$. Asi je dobré při řešení zmínit, že se počet optimálních řešení může zvětšit, ale to nevadí.