

2. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Formulace LPček a IPček

Řešení. Na tabuli: Dopravní problém poprvé, tok v síti.

PŘÍKLAD PRVNÍ S pomocí znalostí z přednášky rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

- Každá úloha LP (polynomiální velikosti) je řešitelná v polynomiálním čase.
- Každá úloha IP (polynomiální velikosti) je NP-těžká.
- Každou úlohu LP můžeme převést na ekvivalentní tvar, který v podmínkách obsahuje pouze rovnosti.
- Pokud úloha LP nemá maximalizační klauzuli, jde ji převést na rovnicový tvar a vyřešit Gaussovou eliminací.

Řešení.

- Tohle by měla být pravda, profesor to už říkal i na přednášce.
LP je polynomiální, byl to dlouho otevřený problém. Simplexová metoda je exponenciální, ale elipsoidová a Karmarkarova metoda vnitřního bodu jsou polynomiální.
- Nepravda, například IP jde zakódovat max. párování, které vyřešit umí jiným algoritmem. Jednodušší je to ale ukázat „podvodem“, čili vygenerovat IP polynomiální velikosti, který se dá řešit z hlavy.
Typicky jde o to, že LP relaxace některých ILP problémů mají všechny vrcholy celočíselné (bipartitné párování). Vážené párování obecných grafů má všechny body "poloceločíselné" (tak tomu myslím říkal Kolman), tedy z $\{0, 1, \frac{1}{2}\}^n$. Ale vhodným postupem se dají zceločíslnit.
- Pravda, pokud se mluví o podmínkách typu $Ax \leq b$ a ne „samozřejmých podmínkách“ typu $x \geq 0$ (ty upravit nejdou).
- Nepravda; na první pohled by se zdálo, že by to pravda být mohla, ale není, protože Gaussovka si není schopna poradit s podmínkami typu $x \geq 0$ – může vám najít řešení, které má záporné proměnné, a není jak ho přeměnit na nějaké, které by mělo všechny proměnné kladné.

PŘÍKLAD DRUHÝ Pro každý zadaný problém navrhnete lineární nebo celočíselný program, který jej řeší. (Pokud přijdete na lineární program, je to určitě lepší, ale nejde to vždy.)

- (Dopravní problém jinak.) V Kocourkově je n pekárna a m obchodů. Každý den i -tá pekárna upeče p_i rohlíků a j -tý obchod prodá o_j rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z i -té pekárny do j -tého obchodu stojí c_{ij} korun.
Jenže! Praxe v Kocourkově ukázala, že když i -tá pekárna zásobuje j -tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij} . Logistiku l_{ij} je nutné platit pouze tehdy, když i -tá pekárna zásobuje j -tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij} .
Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.
- (Prokládání přímkou.) Máme n bodů v rovině. Najděte přímku (resp. souřadnice přímky), která minimalizuje sumu vertikálních vzdáleností bodů od výsledné přímky. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose y .
Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímka není kolmá na osu x .
- (Nejkratší cesta.) Pro zadaný neohodnocený orientovaný graf G a dva vyznačené vrcholy s, t navrhnete lineární program, který spočítá délku nejkratší cesty z s do t .

Řešení. Příklady jsou odděleny v repozitáři příkladů, tedy vkládám sem jednotlivá řešení.

- (Dopravní problém jinak) Počet rohlíků, které se z i -té pekárny převezou do j -tého obchodu, je $x_{ij} \geq 0$. Pro i -tou pekárnu musí platit $\sum_j x_{ij} = p_i$ a pro j -tý obchod musí platit $\sum_i x_{ij} = o_j$.

Minimalizujeme náklady na převoz, tj. $\min \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$.

Musí platit ekonomická rovnováha $\sum_i p_i = \sum_j o_j$. Tato podmínka je postačující, protože popsaný polyedr je omezený a přípustné řešení lze nalézt hladově.

Přidáme nové proměnné $y_{ij} \in \{0, 1\}$, které budou rovny jedné právě, když x_{ij} je nenulové. Cílová funkce je $\min \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + l_{ij}y_{ij}$. Správnou hodnotu proměnné y_{ij} zajistí podmínka $p_i y_{ij} \geq x_{ij}$.

- (Prokládání přímkou) Přímka je zadána jako $y = ax + b$ a body (x_i, y_i) . Vektikální vzdálenost je $|(ax_i + b) - y_i|$, tedy proměnné budou vzdálenosti d_i , a a b , minimalizujeme jejich sumu a podmínky jsou $-d_i \leq (ax_i + b) - y_i \leq d_i$. Bylo by dobré zmínit, k čemu to je a proč nám neavdí předpoklad nekolmosti, popř jak ho odstranit. Například přehození os, či epsilon perturbací...
- (Nejkratší cesta) Zorientuju graf a budu posílat tok 1 z s do t . Tedy proměnné x_{uv} pro hrany uv , minimalizuji $\sum_{e \in E} x_{uv}$ (což je hledaná délka cesty) za podmínek, že výstupní tok je nejvyšší vstupní, pro všechny vrcholy vyjma s a t . Pro t musí být rozdíl vstupu a výstupu alespoň 1.

PŘÍKLAD TŘETÍ Mějme zadanou matici A , vektor b a lineární funkci f . Z nich můžeme postavit třeba tento celočíselný program C :

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

Můžeme z nich ale postavit také následující lineární program L :

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in [0, 1]^n \end{aligned}$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné. Pojmenujme jedno optimální řešení celočíselného programu x_C^* a jedno optimální řešení lineárního programu x_L^* . Dokažte, že platí následující nerovnost:

$$c^T x_C^* \leq c^T x_L^*.$$

Řešení. Platí hned z toho, že řešení celočíselného programu je přípustné řešení lineárního programu.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ NP-těžký problém VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ je zadaný následovně:

Vstup: Neorientovaný graf G s nezápornými reálnými vahami na vrcholech, zadaných funkcí $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Cíl: Najít podmnožinu vrcholů S takovou, že každá hrana $e \in E(G)$ má alespoň jeden koncový vrchol v S (říkáme, že vrchol *pokryje* tuto hranu, odtud vrcholové pokrytí).

Ze všech takových podmnožin S hledáme tu, která má *nejmenší váhu*, čili nejmenší součet $\sum_{s \in S} w(s)$.

Navrhněte celočíselný program s proměnnými $x \in \{0, 1\}$, který najde optimální řešení problému VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ.

Řešení. Proměnné x_v pro vrcholy, v patří do pokrytí $\Leftrightarrow x_v = 1$. Minimalizujeme $\sum_{v \in V} w(v)x_v$ za podmínek $x_v + x_w \geq 1$ pro všechny $vw \in E$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Minule jsme na cvičení ukazovali 2-aproximaci neváženého vrcholového pokrytí. Zkuste vymyslet, jak využít předchozích dvou příkladů k tomu, abychom našli 2-aproximaci problému VÁŽENÉ VRCHOLOVÉ POKRYTÍ.

Řešení. Vezmeme řešení LP z předešlého cvičení a to zaokrouhlíme následovně: Všechny $x_v \geq \frac{1}{2}$ zaokrouhlíme nahoru, ostatní dolů. Tím jsme příspěvek každé proměnné k celkové váze nejvyšší zdvojnásobili, a protože LP nikdy nemá horší optimum než IP, je to 2 aproximace.

PŘÍKLAD ŠESTÝ Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujícího, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0, 1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} f(uv)x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{i|ui \in E} x_{ui} = 2$.“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

Řešení. Přípustným řešením může být i množina disjunktních kružnic, které pokrývají všechny vrcholy. Pro správné řešení musíme přidat podmínku $\sum_{uv \in E, u \in U, v \notin U} x_{uv} \geq 1$ pro každou vlastní podmnožinu vrcholů U . Druhá možnost je IP „zorientovat“ a přidat pro každý vrchol (reálnou či celočíselnou) proměnnou u_v a podmínky $u_w \geq u_v + nx_{vw} - (n - 1)$ pro všechny hrany vyjma hran z jednoho vrcholu ven.

PŘÍKLAD SEDMÝ

1. Nalezněte matici $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ se všemi čísly mezi $[-10, 10]$ takovou, že Gaussova eliminace (převod na trojúhelníkovou matici) v nějakém kroku nebo na konci vytvoří číslo velké exponenciálně, čili $\Omega(2^n)$.
2. Mejsme celočíselnou matici $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ se všemi čísly v intervalu $[-k, k]$. Zkuste vymyslet odhad na velikost dvojkového zápisu determinantu matice B . Je velikost zápisu tohoto čísla v dvojkové soustavě polynom, nebo exponenciála v n ?
3. *Z přednášky:* Navrhněte, jak lze zajistit, aby Gaussova eliminace byla opravdu polynomiální tedy i ve velikosti čísel na vstupu.

Řešení. <http://www.cs.bu.edu/faculty/gacs/courses/cs530/lectures/exact-Gauss.pdf>

Moje prozatimní porozumění jest: Základem je lemma, které vyjádří všechny mezivýsledky jako podíl nějakých determinantů podmatic. O determinantech víme, že mají polynomiálně číslic. (Přesněji pro A celočíselnou matici $|\det A| \leq n!K^n$, kde K je maximum z absolutních hodnot prvků A .) Stačí tedy počítat se zlomky a průběžně krátit. To je ale z praktického hlediska zbytečně pomalé, takže ukazují nějaký chytřejší způsob, jak nekrátit všechno. Další varianty jsou: Počítat na fixní počet desetinných míst a nakonec zaokroulit – musí se upočítat kolik jich potřebuji, a nevím jak to funguje, když chci řešit rovnici, ne jen počítat determinant (pokud má matice plnou hodnotu, tak asi Crameovo pravidlo, ale jinak?). Další možnost je počítat modulo prvočíslo, které je větší než největší číslo, co se ve výpočtu může objevit (resp. více prvočísel tž. jejich součin je dost velký, výsledek pak zrekonstruuji dle Čínské věty o zbytcích).