

1 Optimalizační metody

Vznik ve 40. letech, motivace válečná logistika, později teorie her (von Neumann), ekonomie.

Kombinatorická optimalizace

- nejkratší cesty v grafu
- minimální kostry
- párování v grafu
- toky v síti
- (problém obchodního cestujícího)
- (vrcholové pokrytí)

Lineární (matematické) programování

- studium soustav nerovnic a jejich řešení
- optimalizace řešení za podmínek určených soustavou nerovnic

Náplň přednášky

- teorie lineárního programování (dále LP), mnohostěny
- vztah LP a kombinatorické optimalizace
- simplexová metoda, další algoritmy
- párování v grafech
- celočíselné programování
- použití LP pro těžké úlohy
- matroidy

Soustava nerovnic optimalizujeme řešení rovnice omezené soustavou nerovnic

- jedno řešení
 - víc řešení
 - žádné řešení - žádné přípustné řešení
 - žádné řešení - účelová fce neomezená
-
- rovnice/nerovnice
 - proměnné nezáporné/obecné

Převody

rovnice $\rightarrow$ nerovnice • substituce (opatrně)

$$\bullet Ax = b \rightarrow Ax \leq b; Ax \geq b$$

nerovnice $\rightarrow$ rovnice $Ax \leq b \rightarrow Ax + z = b; z \geq 0$

obecné proměnné $\rightarrow$ nezáporné proměnné $x \rightarrow x^+ - x^-; x^+, x^- \geq 0$

2 Lineární programování

2.1 Patero motivací

Rychle řešíme soustavy lineárních nerovnic. I sebepraktičtějšímu programátorovi se občas stane, že si určitý podproblém svého velkého algoritmu představí jako systém nerovnic. Dobrým příkladem jsou třeba geometrické úlohy v počítačových hrách – kolize objektů, testování, je-li míč v poli nebo mimo, a tak dále.

Lineární programování, kterým se v předmětu budeme nějakou dobu zabývat, je právě (a pouze) řešení lineárních nerovnic – a díky velkému zájmu o tento obor v posledních 50 letech máme jako informatici k dispozici spoustu dobrých knihoven, které nám stačí použít a můžeme naši soustavu vyřešit přímo, bez nutnosti jiného popisu.

Mohu-li to vyslovit, je to pravda. Toto zvolání je jádrem velké části filozofie matematiky – proč je tak snadné vyslovit tvrzení, ale tak těžké najít jeho důkaz? V informatice máme podobný problém: jak je možné, že existují úlohy tak snadno popsateľné, ale s tak složitým řešením – nebo možná s žádným polynomiálním řešením?

Problém takto zásadní vyžaduje zásadní řešení, a jedno šalamounské se nabízí: *zakázat lež*. Vytvoříme jazyk, ve kterém vyslovit tvrzení znamená vyslovit důkaz, a vyslovit problém znamená vyslovit algoritmus!

Lineární programování jako jazyk opravdu lhát zakazuje. Jakmile popíšete svůj problém pomocí lineárního programu, už máte zaručeno, že je polynomiálně řešitelný. Dokonce je P-úplné, což znamená, že každý polynomiálně řešitelný problém v něm vyjádřit jde.

Přestože je LP takto filozoficky čisté, nechceme tím říci, že je dokonalé – některé polynomiální problémy se v něm vyslovují opravdu těžko. Jak se s tímto filozofickým problémem potýkají matematici, můžete najít například v knize Homotopy Type Theory.

Snadné ověření optimality. Představte si, že vám GPS navigace oznámí nejkratší cestu z Prahy do Olomouce. Cesta to bude jistě dobrá, ale jakou máte jistotu, že bude nejkratší? Budete si asi muset najít nejkratší cestu sami a pak porovnat jejich délky.

Kdyby ale navigace místo nejkratší cesty řešila soustavu rovnic, důkaz optimality je snadný – navigace mi předloží řešení, tak já zkontroluji, že každá rovnice je splněna.

Lineární programy představují zlatou střední cestu – problémy jako nejkratší cesta jdou popsat pomocí LP, ale daný model (lineární program) umožňuje snadnou kontrolu optimality, podobně jako v soustavě rovnic.

Maximální X je minimální Y . Slavná Ford-Fulkersonova věta říká formuli v nadpisu, kde za X dosadíme „tok“ a za Y „řez“. Pokud znáte teorii lineárního programování, tak je důkaz této věty klasicky *triviálně triviální*. Co víc, lineární programování (a teorie matroidů)

popisuje rozsáhlou množinu problémů a struktur, jejichž zásadní vlastností je, že mají snadno naležitelný duál, který dává smysl.

Aproximace pomocí LP. Už jsme zmínili, že lineární programování je P -úplné. Jeho blízkým příbuzným je *celočíslné programování*, které má podobné vlastnosti jako LP, avšak je NP -úplné. Pokud věříte jako my, že $P \neq NP$, pomohou vám znalosti z teorie lineárního programování k tomu, jak stavět dobré aproximační algoritmy k NP -těžkým problémům. Občas stačí jen změnit celočíselné proměnné za reálné a zaokrouhlit!

2.2 Úloha lineárního programování

Lineární programování je jen řešení soustavy lineárních nerovnic s tím, že chcete maximalizovat nějaké proměnné. To je vše! Opravdu:

Definice 2.1. Úloha LP (ve standardním tvaru) je optimalizační úloha s cílem maximalizovat $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (porovnání po složkách) přes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Značení:

n počet proměnných

m počet podmínek

Terminologie:

účelová funkce $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$

přípustné řešení $\mathbf{x}$ splňující $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

optimum přípustné $\mathbf{x}$ s maximální hodnotou $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$

nepřípustná úloha LP neexistuje přípustné řešení

neomezená úloha LP existuje přípustné řešení s libovolně velkou hodnotou $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$

Definice 2.2. Úloha LP v rovnicovém tvaru je optimalizační úloha s cílem maximalizovat $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ za podmínek $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ přes $\mathbf{x} \in [0, \infty)^n$ (ve světě LP můžeme psát $\mathbf{x} \geq 0$).

Vztah mezi lineární algebrou a LP

lin. algebra	lin. programování
soustavy rovnic	soustavy nerovnic
nad obecným tělesem	nad $\mathbb{R}$
řešení: afinní prostory	řešení: mnohostěny
Gaussova eliminace	simplexová metoda
hodnost, dimenze, ...	dualita

Dopravní problém Máme nějaké zdroje a nějaké cíle. Z každého zdroje se dá dojet do každého cíle, přepravit jednotku zboží mezi zdrojem i a cílem j stojí $c_{i,j}$, zdroje mají kapacitu (a_i), cíle požadavky (b_i).

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & \sum_{i,j} c_{ij}^T x_{ij} \\ \text{pro} & \mathbf{x} \geq 0 \\ \text{za podmíněk} & \sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \\ & \sum_i x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \end{array}$$

případně $x_{i,j} \in \mathbb{N}$ (celočíselné programování).

Úloha celočíselného programování (IP - integer programming) je optimalizační úloha s cílem maximalizovat $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ za podmíněk $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Smíšené celočíselné programování (MIP - mixed IP) některé proměnné $\in \mathbb{Z}$, některé $\in \mathbb{R}$

Binární celočíselné programování $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$

Hledání nejkratší cesty je dán orientovaný graf s cenami hran c_e , $e \in G$; s, t vrcholy, hledáme nejkratší cestu z s do t .

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & \sum c_e x_e \\ \text{pro} & x_e \in \{0, 1\} \\ \text{za podmíněk} & \sum_u x_{uv} - \sum_u x_{vu} = -1 \quad \text{pro } v = s \\ & = +1 \quad \text{pro } v = t \\ & = 0 \quad \text{jinak } (\forall v \in V - \{s, t\}) \end{array}$$

Bellman-Ford y_v délka nejkr. cesty $s \rightarrow v$

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & y_t - y_s \\ \text{za podmíněk} & y_v - y_u \leq c_{uv} \quad \text{pro všechny hrany } uv \\ & y_s = 0 \end{array}$$

Fordův algoritmus nastaví vzdálenosti na nekonečna a pak opravuje hodnoty, pokud jsou porušené nerovnosti.

Belmannův dělá totéž, v pořadí které zaručí polynomiální časovou složitost.

Důkaz: (1) přípustné řešení $\rightarrow y_t \leq$ délka nejkratší cesty (2) existuje přípustné řešení $y_t =$ délka nejkratší cesty viz důkaz Bellman-Forda

Dualita s programem výše.

3 Příklady

3.1 Vrcholové pokrytí

Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$, vrcholové pokrytí je podmnožina vrcholů $U \subseteq V$ taková, že každá hrana z E je incidentní aspoň jednomu vrcholu z U . Zavedeme proměnné pro vrcholy x_v , jejich hodnota je buď 1, pokud je vrchol v ve vrcholovém pokrytí, nebo 0, když ne. Celočíselný program:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \\ \text{za podmíněk} & x_u + x_v \geq 1 \quad \forall \{u, v\} \in E \end{array}$$

Podmínky $x_u + x_v \geq 1$ nám zaručí, že každá hrana bude pokrytá vrcholem a výběr proměnných z $\{0, 1\}$ zase celočíselnost. **LP relaxace** této úlohy:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{pro} & 0 \leq x_v \leq 1 \\ \text{za podmíněk} & x_u + x_v \geq 1 \quad (\forall u, v) \{u, v\} \in E \end{array}$$

Problém je, že optimální řešení této LP relaxace nemusí (a pravděpodobně také nebude) optimálním řešením původní úlohy celočíselného programování. Navíc proměnné budou reálná čísla mezi 0 a 1.

3.2 Nezávislá množina

Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$, nezávislá množina je podmnožina vrcholů $U \subseteq V$ taková, že Žádné dva vrcholy z U nejsou spojené hranou. V celočíselném programu opět použijeme proměnné pro vrcholy. x_v je rovno 1, pokud v patří do nezávislé množiny, 0 jinak.

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizuj} & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \\ \text{za podmíněk} & x_u + x_v \leq 1 \quad (\forall u, v) \{u, v\} \in E \end{array}$$

Podmínky $x_u + x_v \leq 1$ zaručují, že do nezávislé množiny se může dostat nejvýše jeden z vrcholů incidentních každé hraně. LP relaxace by se provedla jako u vrcholového pokrytí.

Podobně můžeme modelovat i další grafové problémy, lineární programování je vhodné zj. pro ty, kdy jsou omezující podmínky lokální (tedy ne např. TSP, kde je problém zajistit souvislost).

3.3 Minimální perfektní párování v bipartitním grafu

Na vstupu máme bipartitní graf $G = (U, V, E)$ $|U| = |V| = n$, $E \subseteq U \times V$, G má perfektní párování, a váhovou funkci $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. A hledáme perfektní párování $M \subseteq E$ takové, že $\sum_{e \in M} w(e)$ je minimální.

V celočíselném programu tentokrát zvolíme proměnné pro hrany:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & \sum_{e \in E} w(e)x_e \\ \text{pro} & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \\ \text{za podmíněk} & \sum_{v \in V} x_{uv} = 1 \quad \forall u \in U \\ & \sum_{u \in U} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V \end{array}$$

Podmínky zajistí, že do každého vrcholu v U i V vchází právě jedna hrana tedy, že se jedná o perfektní párování. Přímou dostaneme i LP relaxaci této úlohy:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizuj} & \sum_{e \in E} w(e)x_e \\ \text{pro} & \mathbf{x} \geq 0 \\ \text{za podmíněk} & \sum_{v \in V} x_{uv} = 1 \quad \forall u \in U \\ & \sum_{u \in U} x_{uv} = 1 \quad \forall v \in V \end{array}$$

Tady už nám podmínky nezajistí perfektní párování. Může se stát, že např. dostaneme vrchol stupně 2 takový, že proměnné pro hrany jemu incidentní budou mít obě hodnotu 0.5 nebo dokonce 0.9 a 0.1. Naštěstí pro bipartitní grafy platí následující věta.

Věta 3.1. *Mějme vážený bipartitní graf $G = (V, E)$ a celočíselný program odpovídající hledání minimálního perfektního párování v G , pak existuje optimální řešení $\mathbf{x}$ LP relaxace, které zároveň splňuje $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^m$.*

Důkaz. Pokud graf nemá perfektní párování, pak neexistuje ani přípustné řešení, není tedy co dokazovat. Naopak když graf má perfektní párování, pak optimální řešení existuje, protože přípustná řešení tvoří kompaktní množinu (je omezená, protože $0 \leq \mathbf{x} \leq 1$). Vezmeme tedy $\mathbf{x}$ optimální řešení LP relaxace s minimálním počtem neceločíselných proměnných.

Vybereme podmnožinu hran $E' = \{e \in E \mid x_e \in (0, 1)\}$. Tvrdíme, že graf G' indukovaný hranami z E' neobsahuje vrcholy stupně 1, kdyby totiž takový vrchol měl, tak ten by musel být celočíselný, protože platí podmínky z LP, tedy spor s výběrem hran do E'

Dále tvrdíme, že v G' existuje cyklus $C \subseteq E'$, což plyne z předchozího. A protože je G bipartitní, tak $|C| = 2k$ (C je sudé délky). Hrany v cyklu očíslováme $C = e_1, e_2, \dots, e_{2k}$.

Zvolme jiné řešení $\mathbf{y}$ a nějaké malé reálné ε takto:

$$y_e = \begin{cases} x_e + \varepsilon & e_1, e_3, \dots, e_{2k-1} \\ x_e - \varepsilon & e_2, e_4, \dots, e_{2k} \\ x_e & \text{jinak} \end{cases}$$

Máme stále přípustné řešení? Protože ke každému vrcholu jednou ε přičteme a jednou od něj odečteme, tak suma zůstane stejná. A protože x_e pro hrany z C jsou z ostrého intervalu $(0, 1)$, tak pro dostatečně malé ε bude platit i podmínka $0 \leq x_e \leq 1$.

Jak to změní účelovou funkci?

$$\sum_{e \in E} w(e)y_e = \sum_{e \in E} w(e)x_e + \varepsilon \left(\overbrace{\sum_{\text{sudé } e \in C} w(e)x_e - \sum_{\text{liché } e \in C} w(e)x_e}^{=0} \right)$$

Protože $\mathbf{x}$ je optimální, musí být výraz ve svorce 0, jinak bychom mohli vhodnou volbou kladného nebo záporného ε zlepšit optimum.

Pro maximální ε takové, že $\mathbf{y}$ je přípustné řešení, platí pro některou hranu $e \in \{e_1, \dots, e_{2k}\}$, že $x_e \in \{0, 1\}$, tedy $\mathbf{x}$ má méně neceločíselných složek. Postup opakujeme, dokud nejsou všechny x_e celočíselné.

□

4 Nástroje lineární algebry

Abychom pronikli alespoň kousek pod povrch teorie lineárního programování, musíme se přesunout do světa lineární algebry. Souvislost těchto odvětví není jen v prvním slovu jejich názvů, a dá se zjednodušeně popsat takto:

„Lineární nerovnice je nadrovina,
její množina řešení je poloprostor,
průnik poloprostorů je konvexní mnohostěn,
a lineární programování je hledání bodu uvnitř.“

4.1 Afinita

Každý student lineární algebry se setká s pojmy *lineární nezávislost*, *lineární kombinace*, *lineární obal*, *lineární (vektorový) prostor dimenze k* , a další. V tomto textu je opakovat nebudeme.

Pojem, který však zopakujeme (už proto, že se občas vynechává), je *afinita*. Afinita je pojem vzniklý z nutnosti – přímka neprocházející počátkem je stejná jako ta procházející počátkem, tak proč jen jedna z nich je vektorový prostor dimenze 1? Jakmile se oprostíme od ukotvujícího bodu 0, dostáváme afinitu.

Definice 4.1. A je **afinní prostor**, pokud $A = \mathbf{x} + L$ pro nějaké $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, L vektorový podprostor.

Definice 4.2. **Afinní obal** množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech afinních prostorů A takových, že $X \subseteq A$.

Definice 4.3. **Afinní kombinace** bodů z X je bod (výraz) $\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$, kde $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_i \in X$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\sum \alpha_i = 1$

Věta 4.4. *Afinní obal X je roven $\{\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k \mid k \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum \alpha_i = 1\}$*

Definice 4.5. $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou **afinně nezávislé**, pokud neexistují netriviální $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ (tj. ne všechny $= 0$) tak, že $\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = 0$ a $\sum \alpha_i = 0$.

Pozorování 4.6. $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$ *afinně nezávislé právě tehdy, když $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0$ jsou lineárně nezávislé*

Definice 4.7. Dimenze množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je dimenze afinního obalu X .

Pozorování 4.8. *Dimenze množiny X je maximální d takové, že v X existují afinně nezávislé body $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_d$.*

4.2 Konvexita

Definice 4.9. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, pokud pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ a $t \in [0, 1]$ platí $t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \in X$ (s každými dvěma body je v X i úsečka mezi nimi).

Definice 4.10. Konvexní obal $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je definován jako průnik všech konvexních množin obsahujících X :

$$\text{conv}(X) = \bigcap \{C \mid C \text{ je konvexní a } X \subseteq C\}.$$

Definice 4.11. Konvexní kombinace bodů z X je (bod nebo výraz): $\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$, kde $k \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$.

Pozorování 4.12. *Pokud všechny body $\mathbf{x} \in X$ splňují nerovnici $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$, pak i libovolná konvexní kombinace bodů z X splňuje tuto nerovnici.*

Důkaz. Sečteme nerovnice s dosazenými body s příslušnými koeficienty. □

Pozorování 4.13. *Pokud všechny body $\mathbf{x} \in X$ jsou v konvexní množině C , pak i libovolná konvexní kombinace bodů z X je v C .*

Důkaz. Opakovaně použijeme definici konvexity. □

Věta 4.14. *Konvexní obal X , $\text{conv}(X)$ je roven množině všech konvexních kombinací $Y = \{\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k \mid k \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$.*

Důkaz. Každá konvexní množina $C \supseteq X$ obsahuje Y podle předchozího pozorování. Tedy průnik všech takových C obsahuje Y , tedy $Y \subseteq \text{conv}(X)$.

Pro opačnou inkluzi stačí uvědomit si, že množina Y je konvexní. To plyne z toho, že konvexní kombinace z konvexních kombinací bodů z X je sama konvexní kombinací bodů z X . Zjevně $X \subseteq Y$, a konvexita Y tedy znamená, že Y se vyskytuje mezi množinami C v definici $\text{conv}(X)$. Pak ale $\text{conv}(X) \subseteq Y$. □

Věta 4.15 (Carathéodory). *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\dim X = d$. Pak $\text{conv}(X) = \{\alpha_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \alpha_d \mathbf{a}_d \mid \mathbf{a}_i \in X, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1\}$*

Důkaz. Nechť $\mathbf{x} \in \text{conv}(X)$ lze zapsat jako konvexní kombinaci $\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$ tak, že k je minimální.

Pokud $k \leq d$, pak je $\mathbf{x}$ zjevně i konvexní kombinací d prvků, máme hotovo.

Pokud $k > d$, pak $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$ jsou afinně závislé, tedy existují $\beta_i \geq 0$ tak, že $\beta_0 \mathbf{a}_0 + \dots + \beta_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, $\sum \beta_i = 0$, ale pro nějaké i , $\beta_i \neq 0$, mezi β_i jsou tedy kladná i záporná čísla. Dále vezmeme γ maximální takové, že $(\forall i)(\gamma \beta_i + \alpha_i \geq 0)$. Takové číslo bude existovat, protože množina γ , ze které vybíráme, je neprázdná (obsahuje $\gamma = 0$), omezená (protože některé β_i je záporné) a uzavřená (daná neostrými nerovnostmi)

$$\sum_{i=0}^k \underbrace{(\gamma \beta_i + \alpha_i)}_{\geq 0} \mathbf{a}_i = \mathbf{x}$$

Vidíme, že je tato kombinace konvexní, nezápornost máme díky výběru γ a platí $\sum(\gamma\beta_i + \alpha_i) = 1$, to plyne z $\sum \alpha_i = 1$ a $\sum \beta_i = 0$.

Dále díky maximalitě γ bude existovat i tak, že $\gamma\beta_i + \alpha_i = 0$, tedy $\mathbf{x}$ lze vyjádřit jako konvexní kombinaci méně bodů. $\square$

5 Konvexní mnohostěny

Definice 5.1. Nadrovina v $\mathbb{R}^n$ je množina všech $\mathbf{x}$ takových, že $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ pro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, b \in \mathbb{R}$.

Definice 5.2. Poloprostor v $\mathbb{R}^n$ je množina všech $\mathbf{x}$ takových, že $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b\}$ pro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, b \in \mathbb{R}$.

Definice 5.3. Konvexní mnohostěn (polyedr) v $\mathbb{R}^n$ je průnik konečně mnoha poloprostorů. Omezený konvexní mnohostěn se také nazývá polytop.

Věta 5.4 (o oddělování). *Nechť $C, D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou uzavřené, konvexní a disjunktní a C je omezená. Pak existuje nadrovina $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$, která silně odděluje C a D , tj. taková, že $C \subseteq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} < b\}$ a $D \subseteq \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} > b\}$.*

Důkaz. Vezmeme $\mathbf{c} \in C, \mathbf{d} \in D$ tak, že jejich vzdálenost ($\|\mathbf{c} - \mathbf{d}\|$) je minimální. To uděláme tak, že vezmeme nějaké $\mathbf{d}' \in D$ a protože C je kompaktní, tak obsahuje nejvzdálenější bod od $\mathbf{d}'$. Tento bod označme jako $\mathbf{c}'$, vzdálenost $\|\mathbf{c}' - \mathbf{d}'\|$ označme jako α a $\max_{\mathbf{c} \in C} \|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|$ označme jako β . Uvažujme kouli se středem v $\mathbf{c}'$ a s poloměrem $\alpha + \beta$, její průnik s množinou D bude tedy kompaktní podmnožina D a ze dvou kompaktních množin už dokážeme vybrat dva nejbližší body $\mathbf{c}$ a $\mathbf{d}$. Potom označme $\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$ a $b = \mathbf{a}^T \left(\frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2}\right)$. Pak $\mathbf{a}^T \mathbf{d} - \mathbf{a}^T \mathbf{c} = \|\mathbf{a}\|^2 > 0$ a tedy platí

$$\mathbf{a}^T \mathbf{c} < b < \mathbf{a}^T \mathbf{d}.$$

Z toho, že $\|\mathbf{c} - \mathbf{d}\|$ je minimální plyne, že pro všechna $\mathbf{c}'' \in C$ a $\mathbf{d}'' \in D$ platí

$$\mathbf{a}^T \mathbf{c}'' \leq \mathbf{a}^T \mathbf{c} < b < \mathbf{a}^T \mathbf{d} \leq \mathbf{a}^T \mathbf{d}'',$$

a dokázali jsme existenci silně oddělující nadroviny. $\square$

Věta 5.5 (Minkowski-Weyl). *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pak X je omezený konvexní mnohostěn právě tehdy když existuje $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že V je konečná a $X = \text{conv}(V)$.*

Důkaz. " $\Rightarrow$ ": indukcí podle dimenze X (označme jako d)

(i) $\dim(X) \leq 0$ platí (když $|X| = 1$ tak zvol $V := X$)

(ii) Nechť A je afinní prostor dimenze d , $A \supseteq X$. Pak nerovnice z popisu X označíme jako $a_i^T x \leq b_i$. Když $R = \{x \mid a_i^T x = b_i\} \not\subseteq X$, tak označíme $X_i := X \cap R$. Potom $\dim(X_i) = \dim(R \cap A) \leq d - 1$ (toto platí, protože když je jeden afinní prostor ostře obsažen v druhém, pak má menší dimenzi). Vezměme konečnou množinu V_i takovou, že $X_i = \text{conv}(V_i)$. Pak hledaná množina V je $V := \bigcup_i V_i$. Abychom dokázali, že toto platí, musíme dokázat, že $\forall x \in X : x \in \text{conv}(V)$. Zvolme přímkou p tak, že $x \in p, p \subseteq A$. X je omezená, proto musí na přímce p existovat body x' a x'' které nejsou v X . Zvolíme $\bar{x}$:

(a) vezmeme první i takové, že $a_i^T x < b_i$ a $a_i^T x' > b_i$

(b) za $\bar{x}$ vezmeme nejbližší bod k x takový, že $\bar{x} \in p$ a $a_i^T \bar{x} = b$.

$\bar{\bar{x}}$ zvolíme analogicky pro j -tou nerovnost.

Nyní platí $\bar{x} \in X_i$, $\bar{\bar{x}} \in X_j$, tedy $\bar{x} \in \text{conv}(V_i)$, $\bar{\bar{x}} \in \text{conv}(V_j)$ a $x \in \text{conv}(\{\bar{x}, \bar{\bar{x}}\})$. Z toho plyne, že $x \in \text{conv}(V)$.

" $\Leftarrow$ ":

Platí, že $\forall x | x \notin \text{conv}(V)$ existuje oddělovací nadrovina, tj. existují $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha^T x > \beta$ a $\forall v \in V : \alpha^T v \leq \beta$

Dále platí:

(*) Pokud $x_1, \dots, x_k$ splňují nerovnost $\Rightarrow$ konvexní kombinace ji také splňují.

(**) Pokud x splňuje nerovnosti $\Rightarrow$ splňuje i jejich nezáporné lineární kombinace.

Označíme $Q = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \in [-1, 1]^n, \beta \in [-1, 1], \forall v \in V : \alpha^T v \leq \beta \right\}$, tedy platí že Q je omezená a Q je konvexní mnohostěn. Pro každé $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in Q$ platí:

- $-1 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \forall i$
- $-1 \leq \beta \leq 1$
- $\alpha^T v_i \leq \beta \quad \forall v_i \in V \quad \text{neboli} \quad v_i^T \alpha - \beta \leq 0$

Zvolíme W takové, že $Q = \text{conv}(W)$, a chceme dokázat, že

$$X = \{x \mid \forall \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in W : \alpha^T x \leq \beta\}$$

Když toto dokážeme, tak víme, že X je průnik konečně mnoha poloprostorů.

" $\subseteq$ ": $V \subseteq X$ z definice Q (díky (*) a (**)), tedy $\text{conv}(V) \subseteq X$.

" $\supseteq$ ": chceme dokázat, že když $x \notin X$ tak existuje takové $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in W$, že $\alpha^T x > \beta$. Pokud $x \notin X$, pak platí $\exists \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \in Q : \alpha_i^T x > \beta_i$ a toto $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$ je konvexní kombinací $\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} \in W$. Tudíž existuje $\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \in W$ takové, že $\alpha_i^T x > \beta_i$ (díky (**)). □

6 Mnohostěny

6.1 Stěna mnohostěnu

Definice 6.1. Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a $\exists x \in P : c^T x = t$, pak množinu $\{x \mid c^T x = t\}$ nazýváme **tečná nadrovina**, množiny $\{x \mid c^T x = t\} \cap P, \emptyset$ a P nazýváme **stěnami** P . Stěnu F , pro kterou platí $F \neq P$ a $F \neq \emptyset$, nazveme **vlastní stěna**.

Definice 6.2. Vrchol P je stěna dimenze 0.

Hrana P je stěna dimenze 1.

Faseta P je stěna dimenze $\dim(P) - 1$

Věta 6.3. Průnik stěn P je stěna P .

Důkaz. Na cvičeních. □

Věta 6.4. *Nechť P je konvexní mnohostěn, V množina vrcholů P . Pak $x \in V \Leftrightarrow x \notin \underbrace{\text{conv}(P \setminus \{x\})}_{x \text{ je extrémální bod}}$.*

Navíc, pokud je P omezený, tak $P = \text{conv}(V)$.

Důkaz. (Pro V omezené)

$V_0 :=$ minimální množina (vzhledem k inkluzi), že $P = \text{conv}(V_0)$

$V_{\text{ext}} := \{x \in P \mid x \notin \text{conv}(P \setminus \{x\})\}$

Idea důkazu: $V \subseteq V_{\text{ext}} \subseteq V_0 \subseteq V \Rightarrow V_{\text{ext}} = V_0$

$V \subseteq V_{\text{ext}}$ Sporem, volíme $z \in V, z \notin V_{\text{ext}}$

Z definice vrcholu $z \in P, c^T z = t$ a $\forall x \in P \setminus \{z\} : c^T x < t$

$z \notin V_{\text{ext}} \Rightarrow z \in \underbrace{\text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})}_{\subseteq P \setminus \{z\}} \Rightarrow \text{spor, } z \text{ není vrchol.}$

$V_{\text{ext}} \subseteq V_0$ Sporem, volíme $z \in V_{\text{ext}} \setminus V_0$

$z \in P = \text{conv}(V_0) \subseteq \text{conv}(P \setminus \{z\})$ spor

$V_0 \subseteq V$ Použijeme Větu o oddělování

$z \in V_0, D := \text{conv}(V_0 \setminus \{z\}); \{z\}$ a D jsou disjunktní uzavřené konvexní množiny. Tedy podle věty o oddělování máme c, r takové, že $\forall x \in D : c^T x < r$ a $c^T z > r$

Zvolíme $t := c^T z$, pak platí $\forall x \in D : c^T x < r < t$

a tedy $A = \{x \mid c^T x = t\}$ je tečná nadrovina, tedy $\forall x \in V_0 : c^T x \leq t$ a $\forall x \in P : c^T x \leq t$

Tvrdíme: $A \cap P = \{z\}$, nechť $z' \in A \cap P; z' \neq z$, pak

$z' \in \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_0 z$, kde $x_1 \dots x_k \in V_0 \setminus \{z\}, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$.

$z' \neq z \Rightarrow \alpha_0 < 1 \Rightarrow \exists i : \alpha_i > 0$

$$\begin{array}{rcl} c^T x_1 \leq t & & \cdot \alpha_1 \\ \vdots & & \\ c^T x_i < t & & \cdot \alpha_i \\ \vdots & & \\ c^T x_k \leq t & & \cdot \alpha_k \\ c^T z = t & & \cdot \alpha_0 \\ \hline \end{array}$$

$$c^T z' < t \quad \text{spor s volbou } z'$$

□

Věta 6.5. *Stěna stěny je stěna*

Nechť $E \subseteq F$, F stěna konvexního mnohostěnu P . Pak E je stěna $F \Leftrightarrow E$ je stěna P .

Důkaz. $\Leftarrow E = P \cap A$, kde A je tečná nadrovina.

$$F \cap A = P \cap A = E$$

$\Rightarrow$ (pro P omezené)

F definováno $F := \{x \in P \mid c^T x = t\}$ a platí $x \in P : c^T x \leq t$.

Jelikož E je stěna F , $E = \{x \in F \mid d^T x = r\}$ a platí $x \in F : d^T x \leq r$.

Vezmeme rovinu $A_\alpha = \{x \mid d^T x + \alpha c^T x = r + \alpha t\}$, platí $\forall \alpha > 0 : E \subseteq A_\alpha$

V vrcholy P

$$\begin{aligned}\forall x \in V \setminus E \quad d^T x + \alpha c^T x &< r + \alpha t \\ \forall x \in F \setminus E \quad d^T x + \alpha c^T x &< r + \alpha t \\ \forall x \in P \setminus F \quad c^T x &< t, \text{ ale } d^T x \geq r\end{aligned}$$

Zvolíme dostatečně velké α , pro každé x existuje vhodné, vezmeme největší.
 $\forall x \in P \setminus E : d^T x + \alpha c^T x < r + \alpha t$

□

Konvexní mnohostěn $\longleftrightarrow$ přípustná řešení LP
 stěna mnohostěnu $\longleftrightarrow$ množina optimálních řešení při maximalizaci $c^T x$

7 Minimální popis mnohostěnu

Mějme neprázdný konvexní mnohostěn zadaný následujícím popisem:

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid A'x = b' \wedge A''x \leq b''\} \quad (1)$$

tj. pomocí m' rovnic a m'' nerovnic. Zajímá nás, kdy je takový popis nejjednodušší možný, tedy v nějaké „normální formě“, a jak takový popis souvisí s geometrickými vlastnostmi mnohostěnu.

Definice 7.1. Popis (??) je **minimální popis mnohostěnu** P pokud (i) nemůžeme vynechat žádnou rovnost nebo nerovnost bez změny P a (ii) nemůžeme změnit žádnou nerovnost na rovnost bez změny P .

Minimalizovat část popisu s rovnicemi umíme minimalizovat pomocí lineární algebry. Má-li soustava lineárních rovnic řešení, můžeme vždy vybrat $\text{rank}(A')$ nezávislých rovnic a ostatní vynechat. V minimálním popisu tedy platí $\text{rank}(A') = m'$.

První pozorování ukazuje, že dimenze P je dána pouze systémem rovnic.

Pozorování 7.2. Nechť $z \in P$ splňuje $A''z < b''$ (tj. v každé nerovnici platí ostrá nerovnost). Pak

- $\dim(P) = n - \text{rank}(A')$
- z neleží v žádné vlastní stěně P .

V minimálním popisu P navíc takové z existuje.

Důkaz. Nechť L je afinní prostor definovaný soustavou rovnic $A'x = b$. Nechť $\varepsilon > 0$ a $B = \{x \in L \mid \|x - z\| \leq \varepsilon\}$ je koule v L se středem z a poloměrem ε . Protože z splňuje všechny nerovnosti ostře, pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ je $B \subseteq P$. Koule B má dimenzi stejnou jako L , tedy $n - \text{rank}(A')$, protože v ní můžeme najít odpovídající počet afinně nezávislých bodů. Například tak, že vezmeme bázi příslušného vektorového prostoru a jejich malé násobky přičteme k z .

Pokud z leží v nadrovině R , která neobsahuje celé P , pak v kouli B najdeme body na obou stranách nadroviny R . Proto R není tečná nadrovina a nedefinuje stěnu. Bod z tedy není v žádné vlastní stěně P .

V minimálním popisu pro každou nerovnici existuje $z^{(i)} \in P$, takové, že $A''_{i*} z^{(i)} < b''_i$. Vezmeme z těžiště těchto bodů, tj. $z = \frac{1}{m''} \sum_{i=1}^{m''} z^{(i)}$. Platí, že $z \in P$, protože z je konvexní kombinací bodů z P . Navíc každá nerovnost platí ostře, protože pro jeden z bodů platí ostře.

□

Věta 7.3. V minimálním popisu (??) nerovnosti odpovídají vzájemně jednoznačně fasetám mnohostěnu P .

Důkaz. Označme $R_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A''_{i*} \mathbf{x} = b''_i\}$ a $F_i = P \cap R_i$. Tedy F_i je podmnožina P definovaná tak, že itou nerovnici nahradíme rovnicí.

Nejprve ukážeme, že F_i je faseta. Protože nadrovina R_i odpovídá původní nerovnosti, je to tečná nadrovina a F_i je stěna. Z minimality popisu plyne, že je to vlastní stěna. Popis F_i má $m' + 1$ rovnic a $m'' - 1$ nerovnic. Stejně jako v Pozorování?? najdeme bod $\mathbf{z} \in P$, který splňuje všechny nerovnosti ostře. Hodnost matice rovnic je nevyšší $m' + 1$ a podle první části pozorování $\dim(F_i) \geq n - (m' + 1) = \dim(P) - 1$. Z minimality popisu plyne, že F_i je vlastní stěna a tedy to je nutně faseta. Navíc vybraný bod $\mathbf{z}$ neleží v F_j pro $j \neq i$, tedy nerovnice definují různé fasety.

Zbývá dokázat, že kromě F_i neexistují další fasety. Nechť $F \subseteq P$ je faseta. Tvrdíme, že existuje i tak, že $F \subseteq F_i$. V opačném případě by pro každou nerovnost existoval bod $\mathbf{z}^{(i)} \in F$, který itou nerovnost splňuje ostře. Jejich těžiště $\mathbf{z} = \frac{1}{m''} \sum_{i=1}^{m''} \mathbf{z}^{(i)} \in F$ a splňuje všechny nerovnosti ostře, což je podle pozorování spor s tím, že F je vlastní stěna. Pokud $F \subsetneq F_i$, tak F je vlastní stěna F_i a tedy $\dim(F) \leq \dim(F_i) - 1 = \dim(P) - 2$, což je spor s tím, že F je faseta. Je tedy $F = F_i$. $\square$

Důsledek 7.4. Pokud $\dim(P) = n$, tak existuje jediný minimální popis P až na násobky nerovnic.

Důkaz. Afní prostor dimenze $n - 1$ je dán jedinou rovnicí. $\square$

Důsledek 7.5. Každá vlastní stěna mnohostěnu je průnikem faset.

Důkaz. Z důkazu věty víme, že každá vlastní stěna je obsažena v nějaké fasetě. Tento posup iterujeme, v každém kroku změním jednu nerovnici na rovnici. Tedy používáme jen tečné nadroviny odpovídající nerovnicím. Výsledek je roven průniku mnohostěnu se všemi fasetami odpovídající nerovnostem použitým při iteraci. $\square$

8 Simplexová metoda

Nyní si ukážeme praktickou metodu na řešení úloh lineárního programování.

Definice 8.1. Bázické přípustné řešení lineárního programu je takové přípustné řešení, které splňuje n lineárně nezávislých podmínek s rovností. (Počítáme všechny rovnice, těsně splněné nerovnice a těsně splněné podmínky nezápornosti.)

Budeme pracovat s maximalizační úlohou lineárního programování v rovnicovém tvaru:

$$\begin{aligned} &\text{maximalizuj} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{pro} && \mathbf{x} \geq 0 \\ &\text{za podmínek} && A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Navíc budeme předpokládat, že soustava rovnic má řešení a má minimální počet rovnic, tj. $\text{rank}(A) = m$.

Označíme $A_X = A_{*X}$ podmatici A se sloupci indexovanými X pro $X \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Upravíme $Ax = b$ tak, že $A_B = I_m$. Tento stav si budeme udržovat.

Definice 8.2. **Báze** je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že A_B je regulární. (= Báze má správný počet prvků $\text{rank}(A_B) = \text{rank}(A)$.)

Definice 8.3. **Bázické řešení** je řešení odpovídající bázi B , tj. že $x_i = 0$ pro $i \notin B$.

Definice 8.4. **Přípustná báze** je taková, že odpovídající bázické řešení je přípustné.

Pozorování 8.5. *Bázická řešení jsou právě vrcholy mnohostěnu přípustných řešení.*

Důkaz. Z minimálního popisu mnohostěnu. □

Lemma 8.6. *Nechť $\mathbf{x}$ je přípustné řešení a K je množina $K = \{i \mid x_i \neq 0\}$. Pak $\mathbf{x}$ je bázické právě tehdy, když A_K má lineárně nezávislé sloupce.*

Důkaz. $\Rightarrow$: triviální ($K \subseteq B$)

$\Leftarrow$: A_K má $|K| \leq m$ nezávislých sloupců, A má m lineárně nezávislých sloupců a podle věty o výměně doplníme K na bázi B . □

Definice 8.7. **Simplexová tabulka** určená bázi B je soustava $m + 1$ lineárních rovnic pro proměnné $x_1, \dots, x_n, z$, která má stejná řešení jako $Ax = b, z = c^T x$.

Zapisujeme a značíme $x_B = p + Qx_N$, kde N jsou všechny nebázické proměnné ($N = \{1, \dots, n\} \setminus B$), $z = z_0 + r^T x_N$ a matice koeficientů u x_B je I_m . Kde $p \in \mathbb{R}^m$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $z_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Pozorování 8.8. *Báze B je přípustná (= odpovídající řešení je přípustné) $\Leftrightarrow p \geq 0$.*

Pozorování 8.9. *Řešení odpovídající přípustné bázi B je optimální $\Leftrightarrow r \leq 0$.*

Pozorování 8.10. ($\forall$ bázi B) $p = A_B^{-1}b$, $Q = -A_B^{-1}A_N$, $z_0 = c_B^T A_B^{-1}b$, $r = c_N - (c_B^T A_B^{-1}A_N)^T$

Důkaz. $Ax = b$ upravíme na $A_B^{-1}Ax = A_B^{-1}b$, x rozdělíme na x_B a x_N , $z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T \cdot (A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N) \cdot x_N$. □

Lemma 8.11. *Pokud je úloha v rovnicovém tvaru omezená a přípustná, pak má optimální bázické řešení.*

Důkaz. Ke každému řešení existuje bázické řešení se stejnou nebo vyšší hodnotou účelové funkce. □

8.1 Pivotovací krok

Mějme bázické proměnné $B = \{j_1, \dots, j_m\}$, nebázické proměnné $N = \{l_1, \dots, l_{n-m}\}$. B' je nová báze tak, že $B' = B \cup \{l_t\} \setminus \{j_s\}$.

Vstupující proměnná: l_t taková $r_{l_t} > 0$ (z nich vybereme pomocí pivotovacího pravidla).

Vystupující proměnná: $q_{st} < 0$ a $-\frac{p_s}{q_{st}}$ je minimální z $-\frac{p_i}{q_{it}}$ pro $i \in B$, $q_{it} < 0$.

Úprava tabulky: Převědeme vstupující proměnnou x_{l_t} vlevo a dosadíme, nebo to popíšeme formálně - tedy přičtením $-\frac{p_s}{q_{st}} \cdot q_{it}$ násobku stého řádku k i tému.

Pokud **neexistuje vstupující proměnná:** $\Rightarrow$ konec, B dává optimální řešení.

Pokud **neexistuje vystupující proměnná:** $\Rightarrow$ konec, ale úloha je neomezená.

Pivotovací pravidla:

- maximální r_{l_t} (Dantzig)

- Spočítat maximální výslednou hodnotu účelové funkce, tedy maximální z_0 , což ale může být náročné.
- Užít kompromis: **nejstrmější hranu**: spočítáme si maximální $c^t \cdot \frac{x_{\text{nové}} - x_{\text{staré}}}{\|x_{\text{nové}} - x_{\text{staré}}\|}$, kde “ $x_{\text{nové}}$ ” zvolíme například takové, že $x_{l_t} = 1$. Tento postup je praktický, protože většinou trvá malý počet kroků.
- **Blandovo pravidlo**: Vybereme nejmenší možný přípustný index l_t a k němu vybereme nejmenší možný index j_s . Tento postup necyklí.
- **Lexikografické pravidlo**: Vezmeme si t , kandidáta na vstupující proměnnou: $\left(\frac{q_{s1}}{q_{st}}, \frac{q_{s2}}{q_{st}}, \dots, \frac{q_{s \cdot (n-m)}}{q_{st}}\right)$ a vybereme t s lexikograficky nejmenším vektorem. Tento postup necyklí.
- l_t vybereme **náhodně** mezi těmi, které můžeme použít.

Hledání počátečního řešení:

$$\begin{aligned} &\text{maximalizuj} && c^T x \\ &\text{pro} && x \geq 0 \\ &\text{za podmíněk} && Ax = b \end{aligned}$$

Pomocná úloha: úprava taková, aby b bylo nezáporné, pak:

$$\begin{aligned} &\text{maximalizuj} && -(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \\ &\text{pro} && \bar{x} \geq 0, \bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m} \\ &\text{za podmíněk} && \bar{A}\bar{x} = b, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}, \bar{A} = (A|I_m) \end{aligned}$$

$(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ je báze řešení $\bar{A}\bar{x} = b$

$(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ řešení pomocné úlohy $\Rightarrow$ řešení původní úlohy.

9 Dualita lineárního programování

Získáme duální proměnné y_i pro každou primární podmínku A_i . (i -tý řádek A):

$$\begin{aligned} y_i \in \mathbb{R} &\quad \text{pro} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \\ y_i \geq 0 &\quad \text{pro} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \end{aligned}$$

Duální podmínka pro každou primární proměnnou x_j :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &= c_j && \text{pro} \quad x_j \in \mathbb{R} \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &\geq c_j && \text{pro} \quad x_j \geq 0, \text{ pokud primární maximalizuje} \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i &\leq c_j && \text{pro} \quad x_j \geq 0, \text{ pokud primární minimalizuje} \end{aligned}$$

Účelová funkce

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^m b_i y_i & \quad \text{pokud primární je } \max c^T x \\ \max \sum_{i=1}^m b_i y_i & \quad \text{pokud primární je } \min c^T x \end{aligned}$$

Pozorování 9.1. Duální LP k duálnímu LP je původní LP.

Příklad 1. Speciální případy pro $a \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x & \min \quad & b^T y \\ \text{(P)} \quad & x \in \mathbb{R}^n & \text{(D)} \quad & y \geq 0 \\ & Ax \leq b & & A^T y = c \\ \\ \max \quad & c^T x & \min \quad & b^T y \\ \text{(\bar{P})} \quad & x \geq 0 & \text{(\bar{D})} \quad & y \geq 0 \\ & Ax \leq b & & A^T y \geq c \end{aligned}$$

Věta 9.2 (slabá o dualitě). Necht' x a y jsou přípustná řešení (P) a (D) pak $c^T x \leq b^T y$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} y^T Ax &\leq y^T b \quad \text{z (P), } y \geq 0 \\ y^T ax &= c^T x \quad \text{z (D)} \end{aligned}$$

□

Věta 9.3 (o dualitě). Pro úlohy (P) a (D) nebo $(\bar{P})$ a $(\bar{D})$ nastává jedna z možností:

- ani (P) ani (D) nemá přípustné řešení,
- jedna z nich je neomezená a druhá nepřípustná,
- (P), (D) mají přípustné řešení pak existují optimální řešení x^* a y^* a platí: $c^T x^* = b^T y^*$.

Pozn: soustava rovnic $Ax = b$ má řešení $\Leftrightarrow A^T y$ a $b^T y < 0$ nemá řešení.

10 Farkasovo lemma

Lemma 10.1 (Fourier-Motzkinova eliminace). Pro soustavu nerovnic $Ax \leq b$, kde $x \in \mathbb{R}^n$, lze získat soustavu $\bar{A}\bar{x} \leq \bar{b}$, kde $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ řeší soustavu $\bar{A}\bar{x} \leq \bar{b}$ právě tehdy, řeší-li x soustavu $Ax \leq b$. Navíc $x_i = \bar{x}_i$ pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Důkaz.

□

Věta 10.2 (Farkasovo lemma pro nerovnice). Necht' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $b \in \mathbb{R}^n$. Soustava $Ax \leq b$ má řešení právě když neexistuje $y \in \mathbb{R}^m$ tak, že $y \geq 0$, $A^T y = 0$ a $b^T y < 0$.

Důkaz. Jestliže existuje řešení $\mathbf{x}$ a zároveň požadované $\mathbf{y}$, pak sečteme nerovnosti soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nezápornými koeficienty $\mathbf{y}$. Formálně $0 = \mathbf{y}A\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^T\mathbf{b} < 0$, a dostáváme spor. Dokázali jsme tedy implikaci, že pokud soustava $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení, tak požadované $\mathbf{y}$ neexistuje.

Pro důkaz opačné implikace předpokládáme, že soustava $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ nemá řešení a najdeme požadované $\mathbf{y}$. Postupujeme indukcí podle n .

Pro $n = 0$ neexistence řešení znamená, že soustava obsahuje nerovnici $0 \leq \mathbf{b}_i$ s $\mathbf{b}_i < 0$. Zvolíme $\mathbf{y}_i = 1$ a $\mathbf{y}_j = 0$ pro $j \neq i$.

Pro $n \leq 1$ nejprve upravíme soustavu do vhodného tvaru. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že nerovnice mají u x_n koeficienty $a_{in} \in \{-1, 0, 1\}$. Toho můžeme dosáhnout přenásobením jednotlivých nerovnic $1/|a_{in}|$ (pro $a_{in} \neq 0$) a tato transformace nezmění existenci $\mathbf{y}$, protože jednotlivá y_i naopak přenásobíme $|a_{in}|$. Navíc předpokládáme, že řádky matice jsou seřazeny dle znaménka v posledním sloupci. Je-li $\bar{A}$ matice A bez posledního sloupce a $\bar{\mathbf{x}}$ vektor $\mathbf{x}$ bez poslední složky, můžeme pak soustavu označit (S1) a pro vhodné m' a m'' psát takto:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_n &\leq b_i & i = 1, \dots, m' \\ \bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n &\leq b_i & i = 1 + m', \dots, m'' \\ \bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} &\leq b_i & i = 1 + m'', \dots, m, \end{aligned}$$

Kombinací řádků pomocné soustavy vytvoříme novou soustavu (S2):

$$\begin{aligned} (\bar{A}_{i*} + \bar{A}_{j*})\bar{\mathbf{x}} &\leq b_i + b_j & i = 1, \dots, m', \quad j = 1 + m', \dots, m'' \\ \bar{A}_{i*}\bar{\mathbf{x}} &\leq b_i & i = 1 + m'', \dots, m, \end{aligned}$$

Plán důkazu je takový, že ukážeme, že pokud (S1) nemá řešení, pak ani (S2) nemá řešení, pak z indukčního předpokladu existuje $\mathbf{y}'$ pro soustavu (S2) a konečně z tohoto $\mathbf{y}'$ zkonstruujeme $\mathbf{y}$ pro soustavu (S1).

Pro první krok dokážeme opačnou implikaci, tedy z řešení $\mathbf{x}'$ soustavy (S2) zkonstruujeme řešení soustavy (S1). To uděláme tak, že zvolíme $\mathbf{x}_i = b_i - \bar{A}_{i*}\mathbf{x}'$ pro $i = 1, \dots, n-1$ a $x_n = \min_{i \in \{1, \dots, m'\}} (\mathbf{b}_i - \bar{A}_{i*}\mathbf{x}')$. První skupina nerovnic (S1) platí, neboť $x_n \leq \mathbf{b}_i - \bar{A}_{i*}\mathbf{x}'$ podle volby x_n . Zároveň existuje $i \in \{1, \dots, m'\}$ takové, že $x_n = \mathbf{b}_i - \bar{A}_{i*}\mathbf{x}'$, tuto rovnost můžeme pro každé $j \in \{m'+1, \dots, m''\}$ odečíst od nerovnice v (S2) $\bar{A}_{i*} + \bar{A}_{j*})\bar{\mathbf{x}} \leq b_i + b_j$, čímž získáme $\bar{A}_{j*}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_n \leq b_j$ a tedy i druhá skupina nerovnic (S1) platí. Třetí skupina nerovnic (S1) plyne z (S2) triviálně.

Pro poslední krok důkazu nechť existuje $\mathbf{y}'$ pro soustavu (S2). Vektor $\mathbf{y}'$ udává nezápornou kombinaci nerovnic (S2), která vede ke sporu. Vzhledem k tomu, že každá nerovnice (S2) je součtem dvou nebo jedné nerovnic (S1), snadno získáme spor také jako nezápornou kombinaci nerovnic (S1); koeficienty této kombinace jsou požadovaný vektor $\mathbf{y}$. Postupujeme teď o něco přesněji. Vektor $\mathbf{y}'$ má složky odpovídající nerovnicím (S2), tedy jednak složky $\mathbf{y}'_{ij}$ pro každou dvojici $i = 1, \dots, m'$ a $j = 1 + m', \dots, m''$ a jednak složky $\mathbf{y}'_i$ pro každé $i = 1 + m'', \dots, m$. Zvolíme $\mathbf{y}$ takto:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= \sum_{j=m'+1}^{m''} \mathbf{y}'_{ij}, & \text{pro } i = 1, \dots, m' \\ \mathbf{y}_j &= \sum_{i=1}^{m'} \mathbf{y}'_{ij}, & \text{pro } j = m' + 1, \dots, m'' \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{y}'_i & \text{pro } i = m'' + 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Není těžké ověřit, že kombinace nerovnic (S1) s koeficienty $\mathbf{y}$ dává stejnou nerovnici jako kombinace nerovnic (S2) s koeficienty $\mathbf{y}'$. Podle předpokladu je to nerovnice dávající spor. $\square$

Věta 10.3 (Farkasovo lemma). *Nechť $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má nezáporné řešení právě když neexistuje $\mathbf{y}$ takové, že $A^T \mathbf{y} \geq 0$ a zároveň $\mathbf{y}^T \mathbf{b} < 0$.*

Důkaz. Použijeme Farkasovo lemma pro nerovnice na ekvivalentní soustavu $2m + n$ nerovnic $A'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'$ daných takto.

$$A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2m+n) \times n} \quad b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ má nezáporné řešení právě když $A'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'$ má řešení. Jestliže soustava nemá řešení, pak existuje $\mathbf{y} \geq 0$ takové, že $A^T \mathbf{y} = 0$ a $\mathbf{b}^T \mathbf{y} < 0$. Z něj zkonstruujeme $\mathbf{y}$ tak, že vezmeme $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}'_i - \mathbf{y}'_{i+m}$ pro $i = 1, \dots, m$. $\square$

Věta 10.4. *Nechť $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ má řešení. Pak každé řešení $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ splňuje $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \delta$ právě když existuje $\mathbf{y} \geq 0$ takové, že $A^T \mathbf{y} = \mathbf{c}$ a $\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \delta$.*

Důkaz.

" $\Leftarrow$ "... $\mathbf{y}$ dává koeficienty, kterými násobíme nerovnice $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, dostaneme $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \delta$
" $\Rightarrow$ "... neexistuje $\mathbf{y} \Rightarrow$ najdu řešení $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ nesplňující $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \delta$

Neexistuje $\mathbf{y} \geq 0$ a $\lambda \geq 0$:

$$\begin{array}{ll} A^T \mathbf{y} &= \mathbf{c} & \cdot \mathbf{z} \\ b^T \mathbf{y} + \lambda &= \delta & \cdot \frac{1}{\mu} \end{array}$$

Podle Farkasova lematu existuje $\mathbf{z}, \mu$: $A\mathbf{z} + \mathbf{b}\mu \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\mathbf{c}^T \mathbf{z} + \delta\mu < 0$

- $\mu > 0$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x} &:= -\frac{1}{\mu} \mathbf{z} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} &> \delta \end{array}$$

- $\mu = 0$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x}_0 \text{ řešení } A\mathbf{x}_0 &\leq \mathbf{b} & (i) \\ A\mathbf{z} &\geq 0 & (ii) \\ \mathbf{c}^T \mathbf{z} &< 0 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{z} \end{array}$$

z (i) a (ii) vyplývá: $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$

Pro $M \gg 0$ dostáváme $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{M} \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{z} \rightarrow \infty$

(pro libovolné δ vždy najdu dostatečně velké M) $\square$

10.1 Dualita

Označme si speciální případy úloh LP (a úlohy k nim duální):

$$\begin{array}{llll}
 \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \text{minimalizuj} & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
 (P) & \text{pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n & (D) & \text{pro } \mathbf{y} \geq 0 \\
 \text{za podmínek} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \text{za podmínek} & A^T \mathbf{y} = \mathbf{c} \\
 \\
 \text{maximalizuj} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \text{minimalizuj} & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
 (\bar{P}) & \text{pro } \mathbf{x} \geq 0 & (\bar{D}) & \text{pro } \mathbf{y} \geq 0 \\
 \text{za podmínek} & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \text{za podmínek} & A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}
 \end{array}$$

Věta 10.5 (o dualitě). Pro (P) a (D) $[(\bar{P})a(\bar{D})]$ platí jedna z možností:

- (1) (P) i (D) jsou nepřipustné
- (2) Jedna je neomezená, druhá nepřipustná
- (3) Existují optima $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ úloh (P) a (D) splňující $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$

Důkaz. Nechť (P) má řešení, $\delta = \sup\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$

Slabá věta o dualitě: $\delta \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ pro každé přípustné řešení (D)

Pokud $\delta < \infty$, tak podle **Věty 2.** existuje $\mathbf{y} \geq 0$: $A^T \mathbf{y} = \mathbf{c}$, $\mathbf{b}^T \mathbf{y} \leq \delta$

Takže $\mathbf{y}$ je optimální řešení (D) . □

Příklad 2. kdy případ (1) může nastat:

$$\begin{array}{llll}
 \text{maximalizuj} & x_2 + x_3 & \text{minimalizuj} & -y_1 - y_2 \\
 \text{za podmínek} & x_1 \leq -1 & \text{za podmínek} & y_1 - y_2 \geq 0 \\
 & -x_1 \leq -1 & & y_3 \geq 1 \\
 & x_2 - x_3 \leq 0 & & -y_3 \geq 1
 \end{array}
 \quad \text{dualita}$$

Věta 10.6 (o komplementaritě). Nechť $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou přípustná řešení (P) a (D) . Pak jsou obě optimální právě když:

$$(*) \quad (\forall j \in \{1, \dots, m\})(y_j = 0 \vee a^{(j)} \mathbf{x} = b_j) \quad (a^{(j)} \text{ je } j\text{-tý řádek } a)$$

Nechť $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou přípustné řešení $(\bar{P})$ a $(\bar{D})$.

Pak jsou obě optimální $\iff$ platí $(*)$ a $(**)$

$$(**) \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})(x_i = 0 \vee \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = c_j)$$

Důkaz. Pro (P) a (D) :

$$\mathbf{y}^T \mathbf{b} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \cdot (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n y_j \cdot (\mathbf{b} - a^{(j)} \mathbf{x}) \geq 0 \dots \text{rovnost nastává} \iff \text{platí } (*)$$

Pro $(\bar{P})$ a $(\bar{D})$:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{b} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{b} - \mathbf{y}^T A\mathbf{x} + \mathbf{y}^T A\mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \cdot (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) + (\mathbf{y}^T A - \mathbf{c}^T) \cdot \mathbf{x} \geq 0 \dots \text{rovnost nastává} \iff \text{platí } (*) \text{ a } (**). \quad \square$$