Datové struktury

přednáší Václav Koubek   zTEXali Martin Vidner <mvidner@atlas.cz>,
Vladimír Kotal <vlada@devnull.cz> [1]

31. května 2003

[1]Přispěli: Lišák, Jéňa, Žabička, Jindřich, MJ (Martin Mareš ?), Pavel Machek, ...

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Chceme reprezentovat data, provádět s nimi operace. Cíle téhle přednášky jsou popsat ideje, jak datové struktury reprezentovat, popsat algoritmy pracující s nimi a přesvědčit vás, že když s nimi budete pracovat, měli byste si ověřit, jak jsou efektivní.

Problém měření efektivity: většinou nemáme šanci vyzkoušet všechny případy vstupních dat. Musíme buď doufat, že naše vzorky jsou dostatečně reprezentativní, nebo to vypočítat. Tehdy ale zase nemusíme dostat přesné výsledky, pouze odhady.

1.1 Předpoklady

1. Datové struktury jsou nezávislé na řešeném problému; abstrahujeme. Například u slovníkových operací *vyhledej, přidej, vyjmi,* nás nezajímá, jestli slovník reprezentuje body v prostoru, vrcholy grafu nebo záznamy v databázi.

2. V programu, který řeší nějaký problém, se příslušné datové struktury používají *velmi často.*

1.2 Jaké typy složitosti nás zajímají

1.2.1 Paměťová složitost reprezentované struktury

Je důležitá, ale obvykle jednoduchá na spočítání a není šance ji vylepšit — jedině použít úplně jinou strukturu. Proto ji často nebudeme ani zmiňovat.

1.2.2 Časová složitost algoritmů pracujících na datové struktuře

Časová složitost v nejhorším případě

Její znalost nám zaručí, že nemůžeme být nepříjemně překvapeni (dobou běhu algoritmu). Hodí se pro *interaktivní* režim — uživatel sedící u databáze průměrně dobrou odezvu neocení, ale jediný pomalý případ si zapamatuje a bude si stěžovat. Za vylepšení nejhoršího případu obvykle platíme zhoršením průměrného případu.

Očekávaná časová složitost

Je to vlastně vážený průměr — složitost každého případu vstupních dat násobíme pravděpodobností jeho výskytu a sečteme. Je zajímavá pro dávkový režim zpracování. Například Quicksort patří mezi nejrychlejší známé třídící algoritmy, ale v nejhorším případě má složitost kvadratickou.

Pozor na předpoklady o rozdělení vstupních dat. Je známý fakt, že pro každé k existuje číslo n_k takové že každý náhodný graf s alespoň n_k vrcholy s velkou pravděpodobností obsahuje kliku velikosti k. To vede k následujícímu algoritmu, který určí zda graf je nejvýše $k-1$ barevný s očekávaným konstantním časem.

Algoritmus: vstup graf (V, E).

1. Když velikost V je menší než n_k, pak prohledáním všech možností urči barevnost grafu (V, E) a vydej odpověď, jinak pokračuj na následující bod.
2. Zvol náhodně n_k vrcholů v množině V a zjisti zda indukovaný podgraf na této množině obsahuje kliku velikosti k. Pokud ano, odpověď je ne, jinak pokračuj na následující bod.
3. Prohledáním všech možností urči barevnost grafu (V, E) a vydej odpověď.

Tento algoritmus se ale pro praktické použití moc nehodí, protože normálně se například s náhodnými grafy na 200 vrcholech nesetkáváme.

Amortizovaná složitost

Pro každé n nalezneme nejhorší čas vyžadovaný posloupností n operací a tento čas vydělíme n. Amortizovaná složitost je limitou těchto hodnot pro n jdoucí do nekonečna. To nás zajímá proto, že některé datové struktury mají takovou vnitřní organizaci, že na ní závisí složitost, a ta organizovanost se během posloupnosti operací mění. Nejhorší případ vlastně „uklízí“ za následující nebo předchozí rychlé případy.

Například u přičítání jedničky ke k-cifernému binárnímu číslu je časová složitost počet jedniček ve vstupu. Nejhorší případ s lineární složitostí nastane pro číslo ze samých jedniček (tedy $2^k - 1$), ale těch případů je málo a amortizovaná složitost nakonec vyjde konstantní.

Nebo určité algoritmy v překladačích v praxi běží rychle, přestože jednotlivé operace mají velkou složitost v nejhorším případě. To se také podařilo vysvětlit pomocí amortizované složitosti.

Asymptotická notace

Skutečná složitost závisí na implementaci algoritmu, na konkrétním počítači, vlastně se nedá přesně spočítat v obecném případě. Abychom mohli spočítat aspoň něco, začaly se používat odhady složitosti až na multiplikativní konstantu. Tyto odhady popisují růst složitosti vzhledem ke zvětšujícím se vstupům, ale neurčují konkrétní funkci (čísla).

Nechť f, g jsou funkce na přirozených číslech. Značíme:

$$f = O(g), \quad \text{když} \quad \exists c > 0\ \forall n : f(n) \leq cg(n) \tag{1.1}$$
$$f = \omega(g) \quad \forall c > 0\ \exists \text{nekonečně mnoho } n : f(n) > cg(n) \tag{1.2}$$
$$f = \Theta(g) \quad \exists c, d > 0\ \forall n : dg(n) \leq f(n) \leq cg(n) \tag{1.3}$$

Budeme převážně používat O, protože chceme hlavně horní odhady, kdežto dolní odhady bývá obvykle těžší zjistit. Pro úplnost:

$$f = o(g), \text{když} \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Kapitola 2

Slovníkový problém

Je dáno universum U, máme reprezentovat jeho podmnožinu $S \subseteq U$.

Budeme používat operace

- MEMBER$(x), x \in U$, odpověď je *ano,* když $x \in S$, *ne,* když $x \notin S$.
- INSERT$(x), x \in U$, vytvoří reprezentaci množiny $S \cup \{x\}$
- DELETE$(x), x \in U$, vytvoří reprezentaci množiny $S \setminus \{x\}$
- ACCESS(x). Ve skutečných databázích MEMBER nestačí, protože se kromě klíče prvku zajímáme i o jeho ostatní atributy. Tady se ale o ně starat nebudeme — obvyklé řešení je mít u klíče pouze ukazatel na ostatní data, což usnadňuje přemísťovaní jednotlivých prvků datové struktury.

Předpokládá se znalost těchto základních datových struktur: pole, spojový seznam, obousměný seznam, zásobník, fronta, strom.

2.1 Pole

Do pole velikosti $|U|$ uložíme charakteristickou funkci S.

+ Velmi jednoduché a rychlé — všechny operace probíhají v konstantním čase $O(1)$
– Paměťová náročnost $O(|U|)$, což je kámen úrazu. Např. databáze všech lidí v Česku, kódovaných rodným číslem, by snadno přerostla možnosti 32-bitového adresního prostoru (10 miliard RČ $\times$ 4B ukazatel) Ale pro grafové algoritmy je tahle reprezentace velmi vhodná.

Najít lepší příklad?

2.2 Seznam

Vytvoříme seznam prvků v S, operace provádíme prohledáním seznamu. Časová i paměťová složitost operací je $O(|S|)$ (a to i pro INSERT — musíme zjistit, jestli tam ten prvek už není).

Kapitola 3

Hašování I

Universum U, reprezentovaná podmnožina $S, S \subseteq U, |S| = n$. Velikost tabulky: m.

Charakteristická funkce je velké plýtvání pamětí pokud $n \ll |U|$, např. pro $n = \log\log|U|$.

S prvky, které nesou kladnou informaci ($x \in S$), moc nenaděláme. Ale záporné můžeme nějak sdrcnout do jednoho nebo i překrýt s těmi kladnými. To je idea hašování.

Máme hašovací funkci $h : U \to \{0..m-1\}$. Množina S je reprezentována polem $P[0..m-1]$ tak, že prvek $s \in S$ je uložen na místě $h(s)$.

Problémy:

1. Jak rychle spočítáme $h(s)$.
2. Co znamená *uložen na místě* $h(s)$. Co když $h(s) = h(t)$, ale $s \neq t$.

Řešení:

1. Omezíme se na rychle spočitatelné hašovací funkce. Předpokládáme, že $h(s)$ spočteme v čase $O(1)$.
2. Tento případ se nazývá *kolize* a jednotlivé druhy hašování se dělí podle toho, jak řeší kolize.

3.1 Hašování se separovanými řetězci

Hašovací tabulka je pole lineárních seznamů, ne nutně uspořádaných.

MEMBER(x):

1. Spočítáme $h(x)$.
2. Prohledáme $h(x)$-tý seznam.
3. Když tam x je, vrátíme *true*, jinak *false*.

INSERT(x):

1. Spočítáme $h(x)$. *(Jako MEMBER)*
2. Prohledáme $h(x)$-tý seznam. *(Jako MEMBER)*
3. Když x není v $h(x)$-tém seznamu, tak ho tam vložíme.

DELETE(x):

1. Spočítáme $h(x)$. *(Jako MEMBER)*
2. Prohledáme $h(x)$-tý seznam. *(Jako MEMBER)*

3. Když x je v $h(x)$-tém seznamu, tak ho odstraníme.

Očekávaná doba operace je stejná jako očekávaná délka seznamu. Ale pozor na prázdný seznam, u něj nedosáhneme nulového času operace. Ukážeme, že očekávaná doba operace je konstantní.

Předpoklady:

1. h rozděluje prvky U do seznamů nezávisle a rovnoměrně (např. $h(x) = x \bmod m$).
   Tedy pro $\forall i, j : 0 \leq i, j < m$ se počty prvků S zobrazených na i a j liší nejvýš o 1.
2. Množina S má rovnoměrné rozdělení — výběr konkrétní množiny S má stejnou pravděpodobnost. To je dost omezující, protože na rozdíl od hašovací funkce nejsme schopni S ovlivnit.

3.1.1 Očekávaná délka seznamu

Označme $p(\ell) = \mathcal{P}(\text{seznam je dlouhý } \ell)$.

Z předpokladů má $p(\ell)$ binomické rozdělení, neboli

$$p(\ell) = \binom{n}{\ell}\left(\frac{1}{m}\right)^{\ell}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-\ell},$$

tedy očekávaná délka seznamu je

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{\ell=0}^{n} \ell \cdot p(\ell) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \ell \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}(\frac{1}{m})^{\ell}(1 - \frac{1}{m})^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} n \frac{(n-1)!}{(\ell-1)![(n-1)-(\ell-1)]!}(\frac{1}{m})^{\ell}(1-\frac{1}{m})^{n-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n}{m}\binom{n-1}{\ell-1}(\frac{1}{m})^{\ell-1}(1-\frac{1}{m})^{(n-1)-(\ell-1)} = \frac{n}{m}\sum_{k=-1}^{n-1}\binom{n-1}{k}(\frac{1}{m})^{k}(1-\frac{1}{m})^{(n-1)-k}
\end{aligned}$$

README.1st: všechny úpravy směřují k tomuto součtu podle binomické věty

$$= \frac{n}{m}(\frac{1}{m} + (1 - \frac{1}{m}))^{n-1} = \frac{n}{m} = \alpha, \quad (3.1)$$

kde $\alpha = n/m$ je tzv. faktor naplnění, load factor, obvykle je důležité, je-li větší či menší než 1.

3.1.2 Očekávaný čas posloupnosti operací

Když máme posloupnost P operací MEMBER, INSERT, DELETE splňující předpoklad rovnoměrného rozdělení a aplikovanou na prázdnou hašovací tabulku, pak očekávaný čas je $O(|P| + \frac{|P|^2}{2m})$

3.1.3 Očekávaný počet testů

Složitost prohledání seznamu se může lišit podle toho, jestli tam hledaný prvek je nebo není. Úspěšným případem nazveme takovou Operaci(x), kde $x \in S$, neúspěšný případ je $x \notin S$. V úspěšném případě prohledáváme průměrně jenom polovinu seznamu.

co je to test? porovnání klíčů, nahlédnutí do tabulky?

Očekávaný čas pro neúspěšný případ EČN $= O((1-\frac{1}{m})^n + \frac{n}{m})$

Očekávaný čas pro úspěšný případ EČÚ $= O(\frac{n}{2m})$

Neúspěšný případ

Projdeme celý seznam, musíme nahlédnout i do prázdného seznamu.

$$\text{EČN} = 1 \cdot p(0) + \sum_{\ell=1}^{n} \ell \cdot p(\ell) = p(0) + \sum_{\ell=0}^{n} \ell \cdot p(\ell) = (1 - \frac{1}{m})^n + \frac{n}{m} \approx e^{-\alpha} + \alpha$$

Úspěšný případ

Zde Koubková 1998. Koubek 2000 to má trochu jinak

Počet testů pro vyhledání všech prvků v seznamu délky ℓ je $1+2+\cdots+\ell = \binom{\ell+1}{2}$.

Očekávaný počet testů je $\sum_\ell \binom{\ell+1}{2} p(\ell)$, očekávaný počet testů pro vyhledání všech prvků v tabulce je $m \cdot \sum_\ell \binom{\ell+1}{2} p(\ell)$.

Ještě budeme potřebovat následující sumu, kterou spočítáme podobně jako v 3.1:

$$\sum_{l=0}^{n} l^2 \binom{n}{l} \left(\frac{1}{m}\right)^l \left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-l} = \cdots = \frac{n}{m}(1-\frac{1}{m}) + (\frac{n}{m})^2$$

Očekávaný počet testů pro vyhledání jednoho prvku

$$\begin{aligned} \text{EČÚ} = \frac{m}{n}\sum_\ell \binom{\ell+1}{2} p(\ell) &= \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2}(\sum_\ell \ell^2 p(\ell) + \sum_\ell \ell \cdot p(\ell)) \\ &= \frac{m}{2n}(\frac{n}{m}(1-\frac{1}{m}) + \frac{n^2}{m^2} + \frac{n}{m}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} + \frac{n}{2m} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n-1}{2m} \\ &\sim 1 + \frac{\alpha}{2} \qquad (3.2) \end{aligned}$$

3.1.4 Očekávaná délka nejdelšího seznamu

Známe očekávané hodnoty, ale ty nám samy o sobě moc neřeknou. Hodila by se nám standardní odchylka, ta se ale složitě počítá. Místo toho vypočteme očekávaný nejhorší případ:

Dokážeme, že za předpokladů 1 a 2 a $|S| = n \leq m$ je očekávaná délka maximálního seznamu $\text{EMS} = O(\frac{\log n}{\log\log n})$.

Z definice

$$\text{EMS} = \sum_j j \cdot \mathcal{P}(\text{maximální délka seznamu} = j).$$

Použijeme trik: nechť

$$q(j) = \mathcal{P}(\text{existuje seznam, který má délku alespoň } j).$$

Pak

$$\mathcal{P}(\text{maximální délka seznamu} = j) = q(j) - q(j+1)$$

a

$$\text{EMS} = \sum_j q(j)$$

(teleskopická suma) vysvětlit

Spočteme $q(j)$:

$$q'(j) = \mathcal{P}(\text{daný seznam má délku alespoň } j) \leq \binom{n}{j}(\frac{1}{m})^j$$

$$q(j) \leq m \cdot q'(j)$$

$$\text{EMS} \leq \sum \min(1, m\binom{n}{j}(\frac{1}{m})^j) \leq \sum \min(1, m(\frac{n}{m})^j \frac{1}{j!}) \leq \sum \min(1, \frac{n}{j!})$$

Nechť

$$j_0 = \max\{k : k! \leq n\} \leq \max\{k : (k/2)^{k/2} < n\} = O(\frac{\log n}{\log\log n}),$$

pak

$$\begin{aligned}\text{EMS} \le \sum_{j+0}^{j_0} 1 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{n}{j!} = j_0 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{n}{j_0!}\frac{j_0!}{j!} \\ \le j_0 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{j_0!}{j!} \le j_0 + \sum_{j=j_0}^{\infty} (\frac{1}{j_0})^{(j-j_0)} \le j_0 + \frac{1}{1-1/j_0} \\ = O(j_0) = O(\frac{\log n}{\log\log n}) \quad \square \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2 Hašování s uspořádanými řetězci

Uspořádání řetězců vylepší neúspěšný případ.

3.2.1 Očekávaný čas

Očekávaný čas v neúspěšném případě se od času v úspěšném případě liší jen o aditivní konstantu.

3.3 Hašování s přesuny

Zatím jsme předpokládali, že řetězce kolidujících prvků jsou uloženy někde v dynamicky alokované paměti. To není výhodné, protože vyžaduje použití další paměti i když některé řetězce jsou prázdné. Proto nyní budeme ukádat řetězce přímo v tabulce.

Řetězec na i-tém místě uložíme do tabulky tak, že první prvek je na i-tém místě a pro každý prvek řetězce je v položce `vpřed` adresa následujícího prvku řetězce a v položce `vzad` je adresa předchozího prvku. Začátek, resp. konec řetězce má prázdnou položku `vzad`, resp. `vpřed`.

Například pro $U = \mathbb{N}, m = 10, h(x) = x \bmod 10$, hašujeme posloupnost 10, 50, 21, 60:

	klíč	`vpřed`	`vzad`
0	10	5	
1	21		
2			
3	50		5
4			
5	60	3	0
6			
7			
8			
9			

MEMBER je jednoduchý.

Při INSERT musíme zjistit, zda $h(x)$-tý řetězec začíná na $h(x)$-tém místě. Pokud ano, prvek přidáme do $h(x)$-tého řetězce, pokud ne, přemístíme prvek na $h(x)$-tém místě na jiné volné místo, upravíme `vpřed` a `vzad` a prvek vložíme na $h(x)$-té místo.

Předchozí tabulka po INSERT(53):

	klíč	`vpřed`	`vzad`
0	10	5	
1	21		
2			
3	53		
4	50		5
5	60	4	0
6			
7			
8			
9			

Při DELETE musíme testovat, zda odstraňovaný prvek není na 1. místě svého řetězce a pokud ano a řetězec má více prvků, musíme přesunout jiný prvek z tohoto řetězce na místo odstraňovaného prvku.

Jak zjistíme, že jiný prvek y patří tam, kde je uložen? Spočítat $h(y)$ může být relativně pomalé. Pokud `T[i].vzad` někam ukazuje, pak víme, že $h(y) \neq h(x)$.

Tady mám zmatek. Zavést lepší značení.

3.4 Hašování se dvěma ukazateli

Při hašování s přesuny ztrácíme čas právě těmi přesuny, obzvláště, když jsou záznamy velké. To motivuje následující implementaci hašování s řetězci.

Použijeme dva ukazatele, `vpřed` a `začátek`. `T[i].vpřed` je index následujícího prvku v řetězci, který je zde uložen. (Nemusí to být řetězec s $h(x) = i$.) `T[i].začátek` je index začátku řetězce, který obsahuje prvky, jejichž $h(x) = i$.

Ukládáme 50, 90, 31, 60:

	klíč	vpřed	začátek
0	50	3	0
1	31		1
2	60		
3	90	2	
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Přidáme 42, 72, 45:

	klíč	vpřed	začátek
0	50	3	0
1	31		1
2	60		5
3	90	2	
4	45		
5	42	6	4
6	72		
7			
8			
9			

3.5 Hašování s lineárním přidáváním

Jde to i bez ukazatelů.

Je dáno m míst, která tvoří tabulku. Pokud je příslušné políčko již zaplněno, hledáme cyklicky první volné následující místo a tam zapíšeme. Vhodné pro málo zaplněnou tabulku ($< 60\%$, pro 80% vyžaduje už hodně času). Téměř nemožné DELETE: buď označit místo jako smazané, nebo celé přehašovat.

	klíč
0	120
1	51
2	72
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Přidáme 40, 98, 62, 108:

	klíč
0	120
1	51
2	72
3	40
4	62
5	
6	
7	
8	98
9	108

3.6 Hašování se dvěma funkcemi (otevřené h., h. s otevřenou adresací)

Použijeme dvě hašovací funkce, h_1 a h_2, je zde však účelné předpokládat, ze $h_2(i)$ a m jsou nesoudělné pro každé $i \in U$. Při INSERTu pak hledáme nejmenší i takové, že $T[h_1(x) + ih_2(x)]$ je volné.

Mějme $h_1(x) = x \bmod 10$

	klíč
0	10
1	31
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

INSERT(100): $h_1(100) = 0$ a předpokládejme, že $h_2(100) = 3$. Volné místo najdeme pro $i = 1$.

INSERT(70): $h_1(70) = 0$ a předpokládejme, že $h_2(70) = 1$. Volné místo najdeme pro $i = 2$.

	klíč
0	10
1	31
2	70
3	100
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Neuvedli jsme explicitní vzorec pro h_2. Její sestavení je totiž složitější. Všimněte si, že nemůžeme vzít $h_2(100) = 4$. Všechny hodnoty h_2 totiž musí být nesoudělné s velikostí tabulky.

3.6.1 Algoritmus INSERT

Ještě rozmyslet značení a sjednotit zápis algoritmů

1. spočti $i = h_1(x)$
2. když tam x je, pak skonči
   když je místo prázdné, vlož tam x a skonči
3. když je i-té místo obsazeno prvkem $\neq x$, pak:
   spočti $h_2(x)$
   $k = (h_1(x) + h_2(x)) \bmod m$
   while k-té místo je obsazené prvkem $\neq x$ a $i \neq k$ do
   $k = (k + h_2(x)) \bmod m$
   enddo
4. když je k-té místo obsazené prvkem x, pak nedělej nic,
   když $i = k$, pak ohlaš přeplněno, jinak vlož x na k-té místo

Test $k \neq i$ v kroku 3 brání zacyklení algoritmu. Tento problém má alternativní řešení, nedovolíme vložení posledního prvku (místo testu v cyklu si pamatujeme údaje navíc). Analogické problémy nastávají u hašování s lineárním přidáváním.

Tato metoda pracuje dobře až do 90% zaplnění.

3.6.2 Očekávaný počet testů

Předpokládáme, že posloupnost $h_1(x), h_1(x) + h_2(x), h_1(x) + 2h_2(x), \ldots$ je náhodná, tedy že pro každé x mají všechny permutace řádků tabulky stejnou pravděpodobnost, že se stanou touto posloupností.

při neúspěšném vyhledávání

Označíme jej $C(n, m)$, kde n je velikost reprezentované množiny a m je velikost hašovací tabulky.

Buď $q_j(n, m)$ pravděpodobnost, že v tabulce velikosti m s uloženou množinou velikosti n jsou při INSERT(x) obsazená místa $h_1(x) + ih_2(x)$ pro $i = 0..j-1$ (tedy řetězec má alespoň j prvků).

$$C(n,m) = \sum_{j=0}^{n} (j+1)(q_j(n,m) - q_{j+1}(n,m)$$
$$= (\sum_{j=0}^{n} q_j(n,m)) - (n+1)q_{n+1}(n,m) = \sum_{j=0}^{n} q_j(n,m) \quad (3.4)$$

Protože

$$q_j(n,m) = \frac{n}{m}\frac{n-1}{m-1}\cdots\frac{n-j+1}{m-j+1} = \frac{n}{m}q_{j-1}(n-1,m-1) \tag{3.5}$$

dostaneme po dosazení:

$$\ldots = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{n}{m}q_{j-1}(n-1,m-1) = 1 + \frac{n}{m}\sum_{j=1}^{\infty}q_{j-1}(n-1,m-1)$$
$$= 1 + \frac{n}{m}C(n-1,m-1) \tag{3.6}$$

Řešením tohoto rekurentního vzorce je

$$C(n,m) = \frac{m+1}{m-n+1}, \tag{3.7}$$

což dokážeme indukcí:

$$C(n,m) = 1 + \frac{n}{m}C(n-1,m-1)$$
$$= 1 + \frac{n}{m}\frac{m}{m-n+1} = \frac{m-n+1+n}{m-n+1} = \frac{m+1}{m-n+1} \approx \frac{1}{1-\alpha} \tag{3.8}$$

při úspěšném vyhledávání

Součet očekávaných testů všech INSERTů přes vytváření reprezentované množiny dělený velikostí množiny.

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}C(i,m) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{m+1}{m-i+1} = \frac{m+1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{m-i+1}$$
$$= \frac{m+1}{n}((\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}) - (\sum_{i=1}^{m-n+1}\frac{1}{i})) \approx \frac{m+1}{n}\ln\frac{m+1}{m-n+1} \approx \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha} \tag{3.9}$$

Následující tabulka dává očekávanou dobu vyhledávání pro různé zaplnění hašovací tabulky.

α	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
$\frac{1}{1-\alpha}$	2	3.3	10	20	100	1000
$\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}$	1.38	1.7	2.55	3.15	4.65	6.9

3.7 Srůstající hašování (standardní: LISCH a EISCH)

Tabulka má dvě položky: klíč a adresu následujícího prvku. Prvek $s \in S$ je reprezentován v řetězci, který pokračuje v místě $h(s)$.

V následující tabulce jsou srostlé řetězce pro 0 a 3:

	klíč	`vpřed`
0	10	3
1	21	
2		
3	40	4
4	33	7
5		
6		
7	70	
8		
9		

INSERT(x)

1. spočti $i = h(x)$
2. prohledej řetězec začínající na místě i a pokud nenajdeš x, přidej ho do tabulky a připoj ho do toho řetězce.

Kam do toho řetězce máme připojit nový prvek? (To je jiná otázka, než které volné místo zvolit.) Metoda LISCH (late insert standard coalesced hashing) ho připojí na poslední místo řetězce, metoda EISCH (early insert standard coalesced hashing) ho připojí hned za $h(x)$-té místo.

LISCH INSERT(103), EISCH INSERT(94):

	klíč	`vpřed`
0	10	3
1	21	
2		
3	40	4
4	33	6
5		
6	94	7
7	70	9
8		
9	103	

Při úspěšném vyhledání je EISCH asi o 15% rychlejší než LISCH. (Při neúspěšném jsou samozřejmě shodné).

3.8 Srůstající hašování s pomocnou pamětí (obecné: LICH, EICH, VICH)

Standardní srůstající hašování má tu nevýhodu, že se při větším zaplnění tabulky mohou vytvořit dlouhé řetězce. Tabulku tedy prodloužíme o pomocnou paměť („sklep"), do které se nedostane hašovací funkce, a kolidující prvky přidáváme odspodu. Řetězce tedy srostou až po zaplnění sklepa.

Opět existují varianty připojení nového prvku do řetězce: LICH a EICH jsou analogické k LISCH a EISCH. VICH (variable insert coalesced hashing) připojuje na konec řetězce, jestliže řetězec končí ve sklepě, jinak na místo, kde řetězec opustil sklep.

INSERT 10, 41, 60, 70, 71, 90, 69, 40, 79:

	LICH		EICH		VICH	
	klíč	`vpřed`	klíč	`vpřed`	klíč	`vpřed`
0	10	12	10	(12)(11)(9)7	10	12
1	41	10	41	10	41	10
2						
3						
4						
5						
6	79		79	8	79	8
7	40	6	40	9	40	9
8	69	7	69	11	69	
9	90	8	90	(11)(8)6	90	(8)6
10	71		71		71	
11	70	9	70	12	70	(9)7
12	60	11	60		60	11

3.8.1 Srovnávací graf

Nascanovat obrázek z Vittera a Chena

3.9 Srovnání metod

Zde uvádíme porovnání podle počtu testů, protože to se dá *vypočítat*. Doba běhu se musí *měřit*.

V neúspěšném případě:

1. h. s uspořádanými řetězci (nejlepší)
2. h. s přesuny
3. VICH=LICH a h. se 2 ukazateli (VICH je lepší až do $\alpha = 3/4$)
4. EICH
5. LISCH=EISCH (až sem je vše $O(1)$)
6. h. se 2 funkcemi
7. h. s lineárním přidáváním (nejhorší)

Počet testů pro úplně zaplněnou tabulku ($m = n$ nebo $m = n - 1$)

h. s přesuny	1.5
h. se 2 ukazateli	1.6
VICH=LICH	1.8
EICH	1.92
LISCH=EISCH	2.1
h. se 2 funkcemi	n
h. s lineárním přidáváním	n

Následující vzorce už Koubek neprobírá, ale nechám je tady, abyste si vážili toho, že jste jich byli ušetřeni :)

typ	úspěšné vyhledání	neúspěšné hledání
s řetězci	$1+\frac{\alpha}{2}$	$e^{-\alpha}+\alpha$
s uspořádanými řetězci	$1+\frac{\alpha}{2}$	$e^{-\alpha}+1+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha}(1-e^{\alpha})$
s přemisťováním	$1+\frac{\alpha}{2}$	$e^{-\alpha}+\alpha$
se 2 ukazateli	$1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2}$	$1+\frac{\alpha^2}{2}+\alpha+e^{-\alpha}(2+\alpha)-2$
s lineárním přidáváním	$\frac{1}{2}(1+\frac{1}{1-\alpha})$	$\frac{1}{2}(1+(\frac{1}{1-\alpha})^2)$
dvojité hašování	$\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}$	$\frac{1}{1-\alpha}$
LISCH	$1+\dfrac{1}{8\alpha}(e^{2\alpha}-1-2\alpha)+\dfrac{1}{4}\alpha$	$1+\frac{1}{4}(e^{2\alpha}-1-2\alpha)$
EISCH	$\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha}-1)$	$1+\frac{1}{4}(e^{2\alpha}-1-2\alpha)$

$$\text{LICH úspěšné: } \begin{cases} 1+\frac{\alpha}{2\beta} & \text{když } \alpha \le \lambda\beta \\ 1+\frac{\beta}{8\alpha}(e^{2(\alpha/\beta-\lambda)}-1-2(\alpha/\beta-\lambda)) & \\ \quad\times(3-\frac{2}{\beta}+2\lambda) & \\ \quad+\frac{1}{4}(\frac{\alpha}{\beta}+\lambda)+\frac{\lambda}{4}(1-\frac{\lambda\beta}{\alpha}) & \text{když } \alpha \ge \lambda\beta \end{cases}$$

$$\text{LICH neúspěšné: } \begin{cases} e^{-\alpha/\beta}+\frac{\alpha}{\beta} & \text{když } \alpha \le \lambda\beta \\ \frac{1}{\beta}+\frac{1}{4}(e^{2(\alpha/\beta-\lambda)}-1)(3-\frac{2}{\beta}+2\lambda) & \\ \quad-\frac{1}{2}(\alpha/\beta-\lambda) & \text{když } \alpha \ge \lambda\beta \end{cases},$$

kde $\beta = \frac{m}{m'}$ je podíl adresové části tabulky na její celkové velikosti a λ je jediné nezáporné řešení rovnice $e^{-\lambda}+\lambda = \frac{1}{\beta}$.

3.10 Přehašovávání

V předchozích metodách jsme narazili na případy, že při velkém zaplnění tabulky je nutné ji přehašovat. Zde si ukážeme metodu, jak se to dělá.

Máme hašovací funkce: h_0 hašuje do tabulky velikosti $m = 2^0 m$, h_1 do $2m = 2^1 m$, h_2 do $4m = 2^2 m$ …, h_i do $2^i m$. Množinu S reprezentujeme takto:

Uložena je velikost S a číslo i takové, že

$$2^{i-2}m < |S| < 2^i m \tag{3.10}$$

a S je zahašována funkcí h_i.

MEMBER funguje normálně, při INSERT a DELETE kontrolujeme porušení podmínky (3.10) a případně přehašujeme pro $i \pm 1$:

INSERT: Provedeme operaci INSERT a když máme přidat prvek, testujeme, zda $|S|+1 < 2^i m$. Pokud nerovnost platí, dokončíme INSERT. Pokud neplatí, zvětšíme i o 1 a spočítáme uložení $S \cup \{x\}$ vzhledem k nové hašovací funkci h_i.

DELETE: Provedeme operaci DELETE a když máme odstranit prvek, testujeme, zda $i > 0$ a $|S| - 1 = 2^{i-2}m$. Pokud rovnost neplatí, dokončíme DELETE. Pokud platí, zmenšíme i o 1 a spočítáme uložení $S - \{x\}$ vzhledem k nové hašovací funkci h_i.

Tato metoda má malou amortizovanou složitost. Když se spočítá hašovací tabulka pro novou hašovací funkci h_i, pak obsahuje $2^{i-1}m$ prvků a proto je třeba alespoň $2^{i-2}m$ úspěšných operací DELETE nebo $2^{i-1}m$ úspěšných operací INSERT, abychom přepočítávali tabulku pro jinou hašovací funkci. Tedy amortizovaná složitost přepočítávání tabulky je $O(1)$ (tato metoda není vhodná pro práci v interaktivním režimu).

Kapitola 4

Hašování II

4.1 Univerzální hašování

Idea univerzálního hašovaní má odstranit požadavek na rovnoměrné rozložení vstupních dat. Tento požadavek chceme nahradit tím, že budeme mít soubor H hašovacích funkcí do tabulky velikosti m takový, že pro každou podmnožinu S univerza U je pravděpodobnost, že funkce z H se chová dobře, hodně velká (tj. je jen málo kolizí). V tomto případě, když vybereme h z H náhodně s rovnoměrným rozložením, pak pro každou podmnožinu $S \subseteq U$ takovou, že $|S| \leq m$, bude očekávaný čas (počítaný přes všechny funkce z H) konstantní. Rozdíl proti tradičnímu hašovaní je, že předpoklad rovnoměrného výběru hašovací funkce z množiny H můžeme zajistit (nebo se k splnění tohoto požadavku přiblížit), ale výběr vstupních dat ovlivnit nemůžeme. Nyní tuto ideu zformalizujeme.

zajímá nás jednak c, jednak velikost systému

Definice 4.1.1. Třída hašovacích funkcí $H \subseteq \{h | h : \{0 \mathinner{..} N-1\} \to \{0 \mathinner{..} m-1\}\}$ je *c-univerzální*, kde $c \in \mathbb{R}^+$, jestliže

$$\forall x \neq y \in \{0 \mathinner{..} N-1\} : |\{h \in H : h(x) = h(y)\}| \leq c\frac{|H|}{m},$$

Nejprve ukážeme, že c-univerzální systémy existují. Předpokládáme, že $U = \{0 \mathinner{..} N-1\}$, kde N je prvočíslo. Definujme

$$H = \{h_{ab} : h_{ab}(x) = ((ax+b) \bmod N) \bmod m;\ a, b \in \{0 \mathinner{..} N-1\}\}$$

Věta 4.1.1. *H je c-univerzální a $c = \left(\left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil / \frac{N}{m}\right)^2$.*

Důkaz. $|H| = N^2$, což je počet dvojic (a, b).

Nechť (x, y) jsou libovolné, ale pevné. Kolize nastane v případech, když:

$$h_{ab}(x) = h_{ab}(y),$$

neboli

$$\begin{aligned} ax + b &= q + rm \pmod N \\ ay + b &= q + sm \pmod N \end{aligned}$$

kde (a, b) jsou neznámé a parametry (q, r, s) nabývají všech hodnot takových, že

$$q \in \{0 \mathinner{..} m-1\} \land r, s \in \{0 \mathinner{..} \lceil N/m \rceil - 1\}.$$

N je prvočíslo, tedy $\mathbb{Z}_N$ je těleso a pro každou trojici parametrů (q, r, s) má soustava právě jedno řešení (a, b). Počet kolidujících funkcí je přesně tolik, jako počet trojic (q, r, s), který je $m \cdot \lceil N/m \rceil^2$.

$|\{h_{ab} : h_{ab}(x) = h_{ab}(y)\}| \leq m \left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil^2 = \frac{\left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil^2}{\left(\frac{N}{m}\right)^2} \frac{N^2}{m} = c\frac{|H|}{m}$

$\square$

4.1.1 Očekávaná délka řetězce

Mějme libovolnou pevnou $S \subseteq U$, libovolné pevné $x \in U$ a funkci $h : U \to \{0 \mathinner{..} m-1\}$. Definujme

$$S_{h,x} = \text{řetězec prvků } y \in S, \text{ pro které platí } h(y) = h(x). \tag{4.1}$$

Chceme spočítat průměrnou délku S_x , kde průměr počítáme přes všechny $h \in H$, kde H je c-univerzální systém.

Zaveďme

Iversonova konvence: [true]=1, [false]=0

$$\delta_h(x,y) = [x \neq y \wedge h(x) = h(y)] \tag{4.2}$$

$$\delta_h(x,S) = \sum_{y\in S} \delta_h(x,y), \tag{4.3}$$

kde $h : U \to \{0 \mathinner{..} m-1\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{h\in H} \delta_h(x,S) &= \sum_{h\in H} \sum_{\substack{y\in S\\ y\neq x}} \delta_h(x,y) = \sum_{\substack{y\in S\\ y\neq x}} \sum_{h\in H} \delta_h(x,y)\\
&= \sum_{\substack{y\in S\\ y\neq x}} |\{h \in H; h(x) = h(y)\}| \leq \sum_{\substack{y\in S\\ y\neq x}} \frac{c|H|}{m}\\
&= \begin{cases} \frac{cn|H|}{m} & x \notin S\\ \frac{c(n-1)|H|}{m} & x \in S \end{cases}
\end{aligned}$$

Tedy průměrná hodnota $\delta_h(x,S) \leq \frac{cn}{m}$.

Věta 4.1.2. *Pro každou množinu $S \subseteq U$, $|S| = n$ a každé x je očekávaný čas operací MEMBER, INSERT, DELETE $O(c{\cdot}n/m)$, přičemž je braný přes všechny funkce $h \in H$ při jejich rovnoměrném rozdělení.*

Varianta Markovovy nerovnosti:

Markovova: $\mathcal{P}(X \geq t\mathrm{E}X) \leq 1/t$

Věta 4.1.3. *Za stejných předpokladů jako u předchozí věty, když μ je průměrná délka řetězce $S_{h,x}$, pak*

$$\forall t > 1\ \mathcal{P}(|S_{h,x}| \geq t\mu) < \frac{1}{t}$$

Důkaz. H je c-univerzální systém. Nechť $H' = \{h \in H; |S_x| \geq t\mu\}$.

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{|H|} \sum_{h\in H} |S_{h,x}| && H' \subset H\\
&> \frac{1}{|H|} \sum_{h\in H'} |S_{h,x}| && \text{z definice } H'\\
&\geq \frac{1}{|H|} \sum_{h\in H'} t\mu\\
&= \frac{|H'|}{|H|} t\mu
\end{aligned}$$

a tedy

$$\mathcal{P}(|S_x| \geq t\mu) = \frac{|H'|}{|H|} < \frac{1}{t}$$

□

4.1.2 Velikost c-univerzálního systému

Dolní mez

Řekli jsme, že při použití c-univerzálního systému z něj hašovací funkce vybíráme náhodně. V praxi ale budeme většinou používat pseudonáhodný generátor, který se po určité periodě opakuje. Abychom zajistili co největší náhodnost, potřebujeme, aby systém H měl co nejméně funkcí.

Věta 4.1.4. *Když H je c-univerzální systém funkcí z univerza U do $\{0 \mathrel{..} m-1\}$, pak*

$$|H| \geq \frac{m}{c} \lceil (\log_m N) - 1 \rceil .$$

Důkaz. Mějme c-univerzální systém $H = \{h_1 \dots h_{|H|-1}\}$. Nechť $U_0 = U$.

Nechť U_1 je největší podmnožina U_0 taková že h_1 je na (U_1) konstantní.

Nechť U_2 je největší podmnožina U_1 taková že h_2 je na (U_2) konstantní. (Také h_1 je na (U_2) konstantní) A tak dále.

Platí

$$\begin{aligned}
|U_0| &= N \\
|U_1| &\geq \left\lceil \frac{N}{m} \right\rceil \\
|U_2| &\geq \left\lceil \frac{\lceil N/m \rceil}{m} \right\rceil \geq^{\dagger} \left\lceil \frac{N}{m^2} \right\rceil \\
|U_i| &\geq \left\lceil \frac{N}{m^i} \right\rceil
\end{aligned}$$

† vysvětlit

Nechť $t = \lceil \log_m N \rceil - 1$. Platí $\lceil x \rceil - 1 < x$ a log je rostoucí, tedy $m^t < N$ a

$$|U_t| \geq \left\lceil \frac{N}{m^t} \right\rceil > 1,$$

neboli U_t obsahuje alespoň 2 různé prvky, $a \neq b$

Nechť $* = |\{h \in H : h(a) = h(b)\}|$. Z definice c-univerzálního systému $* \leq \frac{c|H|}{m}$. Protože $h_1, \dots, h_t$ jsou na U_t konstantní, dostáváme $* \geq t$. Zbytek je jednoduchý. □

Nás zajímá $\log_2 |H|$, tedy kolik bitů potřebujeme od pseudonáhodného generátoru na určení náhodné hašovací funkce. Zjistili jsme, že potřebujeme nejméně $\log_2 m + \log_2 \lceil (\log_m N) - 1 \rceil - \log_2 c$ bitů.

Příklad malého c-univerzálního systému

My známe c-univerzální systém velikosti N^2, tedy $\log_2 |H| = 2 \log_2 N$, tj. je hodně velké proti právě spočítanému dolnímu odhadu. Nyní zkonstruujeme c-univerzální hašovací systém, který tento dolní odhad v jistém smyslu nabývá.

Buď $p_1, p_2 \dots$ rostoucí posloupnost všech prvočísel. Z teorie čísel bychom si měli pamatovat, že $p_t = O(t \log t)$.

Zvolíme nejmenší t takové, že

$$t \ln p_t \geq m \ln N \tag{4.4}$$

Definujme

$$h_{c,d,l}(x) = (c(x \bmod p_l) + d) \bmod p_{2t} \bmod m \tag{4.5}$$

$$H = \{h_{c,d,l} : c, d \in \{0 \mathrel{..} p_{2t} - 1\}, t < l \leq 2t\}, \tag{4.6}$$

pak $|H| = tp_{2t}^2$, a tedy $\log_2|H| = \log_2 t + 2\log_2 p_{2t} = O(\log t + 2\log 2t + 2\log\log 2t) = O(\log t) = O(\log m + \log\log N)$, čímž jsme se dostali na dolní hranici odvozenou výše.

Dokážeme, že H je 5-univerzální systém.

Zvolme $x \neq y \in U$, spočteme odhad $|\{h \in H : h_{c,d,l}(x) = h_{c,d,l}(y)\}|$, tedy musíme odhadnout ze shora počet trojic c, d, l takových, že $h_{c,d,l}(x) = h_{c,d,l}(y)$. Rozdělíme je do dvou skupin:

1. c, d, l taková, že $h_{c,d,l}(x) = h_{c,d,l}(y)$, ale $x \bmod p_l \neq y \bmod p_l$
2. c, d, l taková, že $h_{c,d,l}(x) = h_{c,d,l}(y)$, a $x \bmod p_l = y \bmod p_l$

1) Platí

$$\begin{aligned} c(x \bmod p_l) + d &= k + qm \pmod{p_{2t}} \\ c(y \bmod p_l) + d &= k + rm \pmod{p_{2t}} \end{aligned}$$

pro nějaká $k \in \{0 .. m-1\}, q, r \in \{0 .. \lceil \frac{p_{2t}}{m} \rceil - 1\}$. Protože p_l je prvočíslo, je počet trojic splňujících (1) roven

$$\begin{aligned} \text{počet trojic} &\leq tm\lceil \frac{p_{2t}}{m} \rceil^2 && \#l \leq t, \#(c,d) \leq \#(k,q,r) \\ &\leq tm\left(1 + \frac{p_{2t}}{m}\right)^2 \\ &= tm\frac{p_{2t}^2}{m^2}\left(1 + \frac{m}{p_{2t}}\right)^2 && \text{vytknutím} \\ &= \left(1 + \frac{m}{p_{2t}}\right)^2 \frac{|H|}{m} \\ &\leq 4\frac{|H|}{m} && \text{jestliže } m \leq p_{2t} \end{aligned}$$

Ještě tedy musíme ukázat, že $m < p_{2t}$. Kdyby ale $p_{2t} \leq m$, pak dostaneme tento spor: $t \ln p_t < p_{2t} \ln p_{2t} \leq m \ln m \leq m \ln N \leq t \ln p_t$.

2) Nechť $L = \{l : x \bmod p_l = y \bmod p_l \wedge t < l \leq 2t\}$. Pak počet trojic splňujících (2) je roven

$$\begin{aligned} \text{počet trojic} &= |L|p_{2t}^2 \\ &\leq \frac{tp_{2t}}{m} && \text{jestliže } |L| \leq t/m \\ &= 1\frac{|H|}{m} \end{aligned}$$

Pokud tedy ještě dokážeme, že $|L| \leq t/m$, pak $|\{h \in H : h_{c,d,l}(x) = h_{c,d,l}(y)\}| \leq 4\frac{|H|}{m} + \frac{|H|}{m} = 5\frac{|H|}{m}$ a H je 5-univerzální systém.

Nechť $P = \prod_{l \in L} p_l$. Z definice L všechna p_l dělí $|x - y|$, tedy i P dělí $|x - y|$, a proto $P \leq |x - y| \leq N$. Protože $P \geq p_t^{|L|}$, dostaneme $|L| \leq \ln N / \ln p_t$, a z definice t (4.4) plyne $|L| \leq t/m$.

4.1.3 Reprezentace a (MEMBER), INSERT, DELETE

Máme m a pro všechna $i = 0, 1, \ldots$ je dán c_i-univerzální systém funkcí H_i hašující do tabulky velikosti $2^i m$. Reprezentace $S \subseteq U$:

- $|S|$
- i takové, že $2^{i-2}m < |S| < 2^i m$
- funkce $h \in H_i$
- reprezentace S vůči h_i

- $\forall j \in \{0..2^i m - 1\}$ je dána délka řetězce reprezentujícího prvky s $h(x) = j$
- konstanty d_i omezující délky řetězce

MEMBER normálně.
INSERT:

1. zjistíme, zda máme přidat do S
2. když délka j-tého řetězce $+1 > d_i$,
   pak spočítáme novou reprezentaci
3. když $|S| + 1 = 2^i m$,
   pak inkrementujeme i a spočítáme novou reprezentaci
4. jinak přidáme prvek do řetězce $h(x)$

DELETE:

1. zjistíme, zda $x \in S$
2. když $x \in S$ a $|S| - 1 = 2^{i-2} m$ a $i > 0$,
   pak dekrementujeme i a spočítáme novou reprezentaci
3. jinak x odstraníme z $h(x)$

Spočítání nové reprezentace:

1. loop
2. zvolíme náhodně $h \in H_i$
3. spočítáme reprezentaci S vůči h
4. until všechny řetězce mají délku $\leq d_i$

Kolikrát proběhne ten cyklus? Závisí to na více parametrech a Koubek to nikde uspokojivě spočítané neviděl.

4.2 Perfektní hašování

Perfektním hašováním myslíme úlohu nalézt pro danou pevnou množinu $S \subseteq U, |S| = n$ perfektní hašovací funkci, tj. funkci, která nemá na množině S kolize. Tato úloha nepřipouští přirozenou implementaci operace INSERT, protože přidaný prvek může způsobit kolizi. Typický příklad použití je tabulka klíčových slov kompilátoru.

Definice 4.2.1. Funkce $h : U \to \{0 .. m-1\}$ je perfektní pro S, když $\forall x \neq y \in S$ platí $h(x) \neq h(y)$.

Za jakých podmínek lze povolit INSERT? Musí být málo pravděpodobný. Prvky navíc se dávají jinam a po jisté době se vše přepočítá do jedné tabulky pro novou perfektní hašovací funkci.
Požadavky na hledanou hašovací funkci:

1. h je perfektní na S
2. $\forall x$ je $h(x)$ rychle spočitatelná
3. m řádově srovnatelné s n
4. zakódování h vyžaduje málo prostoru

Požadavky 2) a 3) jdou proti sobě. A až se nám je podaří skloubit, budeme mít problémy s 4). A navíc hledání h potrvá dlouho.

4.2.1 Perfektní hašovací funkce do tabulky velikosti n^2

Využijeme, co už víme o univerzálním hašování. Pro $k \in \{1 .. N-1\}$ a pro pevné m definujme

$$h_k(x) = (kx \bmod N) \bmod m, \quad \text{kde } N = |U| \text{ je prvočíslo.} \tag{4.7}$$

Budeme hledat vhodná k, m. Definujme míru perfektnosti

$$d = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{x \neq y \in S} \delta_{h_k}(x, y) \tag{4.8}$$

a pro $k \in \{1 .. N-1\}$ položme

$$b_k(i) = |\{x \in S : h_k(x) = i\}| \tag{4.9}$$

Jednak platí

$$d = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{m-1} (b_k(i))^2 - n \right) \tag{4.10}$$

a také

$$d = \sum_{x \neq y \in S} |\{k : h_k(x) = h_k(y)\}| \qquad \text{prohozením sum} \tag{4.11}$$

$$\tag{4.12}$$

Co znamená $h_k(x) = h_k(y)$ pro $x \neq y$? Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} kx \bmod N &= ky \bmod N && \pmod m \\ k(x-y) \bmod N &= 0 && \pmod m \\ k(x-y) \bmod N &= rm && \text{pro } r \in \{-\lfloor N/m \rfloor .. \lfloor N/m \rfloor\} - \{0\}, \end{aligned}$$

tedy

$$d \leq \sum_{x \neq y \in S} 2\frac{N}{m} = \frac{2n(n-1)N}{m}$$

a dosazením do (4.10), podle přihrádkového principu

$$\exists k : \sum_{i=0}^{m-1} (b_k(i))^2 \leq n + \frac{2n(n-1)}{m} \tag{4.13}$$

Pro speciální velikosti tabulky dostáváme dosazením do (4.13):

$$\text{Pro } m = n : \qquad \exists k \text{ nalezitelné v čase } O(nN) : \sum_{i=0}^{m-1} (b_k(i))^2 < 3n \tag{4.14}$$

$$\text{Pro } m = 1 + n(n-1) : \qquad \exists k \text{ nalezitelné v čase } O(nN) : h_k \text{ je perfektní} \tag{4.15}$$

Důkaz. Probíráme všechny možnosti pro k, těch je $O(N)$.

(4.14) Pro dané k spočítáme $\sum (b_k(i))^2$ v čase $O(n) = O(m)$.

(4.15) $\sum (b_k(i))^2 \leq n + \frac{2n(n-1)}{1+n(n-1)} < n + 2$. Kdyby h_k nebyla perfektní, pak $\exists j : b_k(j) \geq 2$ a $\sum (b_k(i))^2 \geq (n-2)1^2 + 1 \cdot 2^2 = n + 2$, spor. Při hledání k^* ověříme perfeknost h_k v čase $O(n)$.

□

Nyní máme perfektní hašovací funkci, která ale porušuje požadavek (3).

4.2.2 Perfektní hašovací funkce do tabulky velikosti $3n$

Zkombinujeme oba výsledky z předchozí části.

Podle (4.14) nalezneme k takové, že $\sum(b_k(i))^2 < 3n$.

Pro každé $i \in \{0 \mathrel{..} n-1\}$ vezmeme množinu kolidujících prvků $S_i = \{s \in S : h_k(s) = i\}$. Označme $n_i = |S_i|$.

Podle (4.15) pro každé i nalezneme k_i takové, že pro $m_i = 1 + n_i(n_i - 1)$ je h_{k_i} perfektní pro S_i.

Každou zahašovanou množinu S_i uložíme ve výsledné tabulce od pozice d_i:

$$d_i = \sum_{j=0}^{i-1}(1 + n_j(n_j - 1)).$$

Konečně definujme

$$g(x) = d_i + h_{k_i}(x), \quad \text{kde } i = h_k(x),$$

která je perfektní a velikost tabulky je

$$m = d_n = \sum_{j=0}^{n-1}(1 + n_j(n_j - 1)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} n_j^2 = \sum_{j=0}^{n-1}(b_k(j))^2 < 3n$$

Ovšem na zakódování této funkce potřebujeme hodně paměti: nevadí nám d_i, ale k a každé k_i je velikosti $O(N)$, tedy potřebujeme $n \log_2 N$ bitů, což odporuje našemu požadavku (4). V dalších krocích budeme zmenšovat čísla definující hašovací funkci.

Podobná funkce daná číslem velikosti $O(N)$

Zvolme prvočíslo p_1 takové, že $1 + n(n-1) \leq p_1 \leq 1 + 2n(n-1)$. Nějaké takové musí existovat (nedokazujeme). Podle (4.15) $\exists k : h_k(x) = (kx \bmod N) \bmod p_1$ je perfektní na S. lepší jména proměnných!

Vytvořme

$$S_1 = \{h_k(s) : s \in S\} \subset \{0 \mathrel{..} p_1 - 1\}$$

a na S_1 aplikujme předchozí sekci, kde $N = p_1$.

Dostáváme hašovací funkci g_1, která

- je perfektní pro S
- je spočitatelná v čase $O(1)$
- hašuje do tabulky $< 3n$
- je určena 1 číslem velikosti $O(N)$
  a $O(n)$ čísly velikosti $O(n^2)$

Podobná funkce daná číslem velikosti $O(n^2 \log N)$

Pro extrémní případy typu $N = 2^{10^6}$ ještě postup vylepšíme, čímž zmenšíme velikost čísel kódujících perfektní hašovací funkci na $O(\log N)$.

Lemma 4.2.1. *Pro každou množinu $S \subseteq \{0 \mathrel{..} N-1\}$ velikosti n existuje prvočíslo p_0 takové, že $f_{p_0}(x) = x \bmod p_0$ je perfektní na S a $p_0 = O(n^2 \log N)$.*

Využití: pro S najdeme prvočíslo p velikosti $O(n^2 \log N)$ takové, že f_p je perfektní na S. Vytvoříme

$$S_0 = \{f_p(s) : s \in S\} \subset \{0 \mathrel{..} p - 1\}$$

a na S_0 aplikujme předchozí postup, kde $N = p$.

Tedy pro každou množinu S velikosti n existuje hašovací funkce f, která

- je perfektní pro S
- je spočitatelná v čase $O(1)$
- hašuje do tabulky $< 3n$
- je určena 2 čísly velikosti $O(n^2 \log N)$ a $O(n)$ čísly velikosti $O(n^2)$

Lemma 4.2.2. *Nechť r je číslo a $p_1, \ldots, p_q$ jsou všechny jeho prvočíselné dělitele. Pak $q = O(\log r / \log\log r)$.*

Důkaz.

$$\begin{aligned} r &\geq \prod_{i=1}^{q} p_i \\ &> q! \\ &= \exp(\sum_{i=1}^{q} \ln i) \\ &> \exp(\int_1^q \ln x \, dx) \\ &\geq \left(\frac{q}{e}\right)^q \qquad \text{kde } \exp(x) = e^x \end{aligned}$$

Tedy

skok

$$q \leq c\frac{\ln r}{\ln\ln r} \quad \text{pro vhodnou konstantu } c.$$

□

Důkaz lemmatu 4.2.1. Předpokládejme $S = \{x_1 < \ldots < x_n\}$. Hašovací funkce $f_t(x) = x \bmod t$ je perfektní právě když t je nesoudělné s číslem

$$D = \prod_{i>j}(x_i - x_j) < N^{n^2}$$

Podle 4.2.2 je mezi prvními $(c \ln D / \ln\ln D) + 1$ prvočísly alespoň jedno, které nedělí D. Víme, že $p_k = O(k \ln k)$, tedy $(c \ln D / \ln\ln D) + 1$-ní prvočíslo má velikost $O(\ln D) = O(n^2 \ln N)$. □

nalezeni prvocisla p_0 vyzaduje cas $O(n^2 \log N)$.

4.2.3 GPERF

Jiná konstrukce perfektní hašovací funkce je použita v programu `gperf`. Distribuován pod GPL. Jeho návrh je popsán v Douglas C. Schmidt, "GPERF: A Perfect Hash Function Generator," in Proceedings of the 2nd C++ Conference, San Francisco, California, April 1990, USENIX, pp. 87–102. Článek se dá stáhnout z http://citeseer.nj.nec.com/schmidt90gperf.html.

pořádnou bibliografii

Kapitola 5

Trie

5.1 Základní varianta

Trie je rovinná implementace slovníku. Máme abecedu Σ velikosti k. Universum jsou všechna slova nad Σ délky právě l (nekonečnou množinu si nemůžeme dovolit a kratší slova doplníme zprava mezerami). Chceme reprezentovat množinu slov $S \subseteq U$.

Definice 5.1.1. *Trie* nad Σ je konečný strom, jehož každý vnitřní vrchol má právě k synů, které jsou jednoznačně ohodnoceny prvky Σ. Každému vnitřnímu vrcholu trie odpovídá slovo nad Σ délky nejvýše l: kořenu odpovídá prázdné slovo Λ; když vrcholu v odpovídá slovo α, pak $v[a]$, synu v ohodnocenému písmenem a, odpovídá slovo αa.

Definice 5.1.2. Řekneme, že trie nad Σ *reprezentuje množinu* S, když:

- Listům je přiřazena boolovská funkce náležení Nal: Nal(t) je true právě když slovo, které odpovídá listu t, je v S.
- Když v je vnitřní vrchol trie odpovídající slovu α, pak existuje $\beta \in S$ takové, že α je prefix β.
- Pro každé slovo $\alpha \in S$ existuje v trie list odpovídající α.

5.1.1 Algoritmus MEMBER

{vyhledání $x = x_1 \dots x_l$}
$t :=$ kořen
$i := 1$
while t není list **do**
  $t := t[x_i]$
  $i := i + 1$
end while
{test}
return Nal(t)

5.1.2 Algoritmus INSERT

{vyhledej x}
if not Nal(t) **then** {trie nemusí být tak hluboké, jak potřebujeme}
  while $i \leq l$ **do**
    vrcholu t přidej k listů ohodnocených písmeny z Σ, jejich Nal := *false*
    $t := t[x_i]$
    $i := i + 1$

end while
Nal(t) := *true*
end if

5.1.3 Algoritmus DELETE

{vyhledej x}
if Nal(t) **then**
Nal(t) := *false*
t := otec t
{opravíme prefixovou podmínku}
while všichni synové t jsou listy s Nal = *false* **do**
zruš listy t
Nal(t) := *false*
t := otec t
end while
end if

Použili jsme obrat t := otec t. To lze provést buď tak, že se vrchol kromě svých synů odkazuje i na svého otce a spotřebuje tak paměť navíc, nebo se cesta z kořene do aktuálního vrcholu během sestupu ve stromu pamatuje na zásobníku. Tento trik se používá u všech stromových struktur.

5.1.4 Časová a paměťová složitost

Jedna iterace cyklu zabere konstantní čas. Čas pro MEMBER je $O(l)$, čas pro INSERT a DELETE je $O(lk)$. Paměťová složitost trie je počet uložených slov násobená délkou cesty a počtem synů, tedy $O(|S|lk)$.

5.2 Komprimované trie

Mějme $\Sigma = \{0,1,2\}$, $l = 7$. $S = \{0202011, 0202012, 0202021, 1212102, 1212111, 1212121, 1212122\}$. Nekomprimované trie pro tuto množinu je na obrázku 5.1. Vidíme, že písmena na druhé až páté pozici jsou vždy stejná a předchozí algoritmy se jimi musí „prokousat“. Přesně řečeno, prohlížení vrcholu v, který má jediného syna, který není list s funkci Nal = *false*, nepřináší žádnou kladnou informaci, protože množiny prvků z S, které jsou reprezentovány vrcholy v podstromu otce v a v podstromu vrcholu v jsou stejné. To vedlo k idei tyto vrcholy ze stromu vynechat a tím zmenšit (kompresovat) trie.

Ke každému vrcholu v přidáme funkci uroven(v) vyjadřující číslo úrovně, ve které se v nachází v původním trie. Ke každému listu v přidáme funkci slovo(v) — slovo, které odpovídá v.

Nyní můžeme vynechávat vrcholy podle následujícího kritéria: je-li v vnitřní vrchol a všichni jeho synové kromě w jsou listy s Nal = *false*, pak v vynech a zařaď w na jeho místo. Tento proces opakujeme dokud trie obsahuje nějaký vnitřní vrchol, jehož všichni synové s výjimkou jednoho jsou listy, pro něž Nal = *false*. Všimněte si, že každý vnitřní vrchol má právě k synů, které jsou v jednoznačné korespondenci s písmeny abecedy Σ.

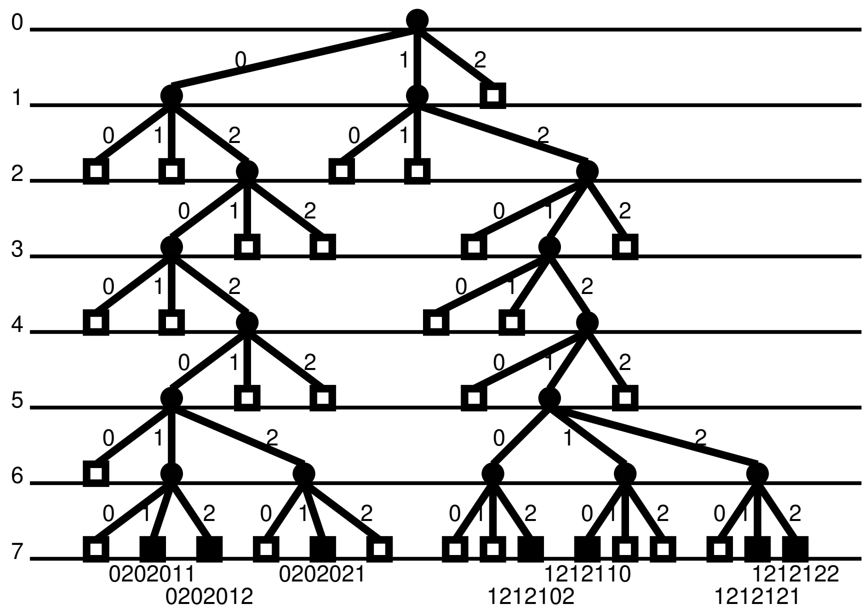
5.2.1 MEMBER

Viz algoritmus 5.1
zde

něco chybí

5.2.2 INSERT

Viz algoritmus 5.2



Obrázek 5.1: Nekomprimované trie

Algoritmus 5.1 MEMBER pro komprimované trie

{vyhledání x}
$t :=$ kořen
while t není list **do**
  $i :=$ uroven$(t) + 1$
  $t := t[x_i]$
end while
{test}
return Nal$(t) \wedge$ slovo$(t) = x$

5.2.3 DELETE

Viz algoritmus 5.3

5.2.4 Časová a paměťová složitost

Paměťová složitost takto komprimovaných trie je $O(nk)$, kde n je velikost reprezentované množiny. (maximálně n-1 vnitřních vrcholů, každý s polem délky k). Časová složitost operace MEMBER je v nejhorším případě $O(l)$, pro INSERT a DELETE je to O(l+k). (může být nutné přidat/odebrat jeden vnitřní vrchol).

V průměrném případě (za předpokladu rovnoměrného rozložení vstupních dat) je to očekávaná hloubka trie. Tu teď spočítáme.

Nechť

$$q_d = \mathcal{P}(\text{trie má hloubku alespoň } d)$$

Očekávaná hloubka trie reprezentující n slov je

$$E_n = \sum_{d=0}^{\infty} d(q_d - q_{d+1}) = \sum_{d=0}^{\infty} q_d$$

Když funkce pref$_{d-1}$, přiřazující slovu α jeho prefix délky $d-1$, je na množině S prostá, pak trie reprezentující množinu S má hloubku nejvýše d. Spočítáme počet množin o velikosti n, na nichž

Algoritmus 5.2 INSERT pro komprimované trie

```
{vyhledej x}
if Nal(t) ∧ slovo(t) = x then
  {Trie už obsahuje x, nedělej nic.}
else
  if slovo(t) = x then
    {Trie obsahuje správný list, pouze nastav příznak. Např. "0202010"}
    Nal(t) := true
  else
    {Bude potřeba vložit nový list.}
    {Najdi, kam ho připojit.}
    α := nejdelší společný prefix slov x a slovo(t). Délku α označme |α|.
    v := vrchol na cestě z kořene do t takový, že uroven(v) je největší, která je ≤ |α|
    if uroven(v) = |α| then
      {v je otec nového listu}
    else {uroven(v) < |α|}
      {Bude potřeba vytvořit otce nového listu}
      a := uroven(v) + 1-ní písmeno α
      u := v[a]
      {Mezi v a u vytvoř nový vnitřní vrchol odpovídající slovu α}
      w := nový vrchol, uroven(w) := |α|
      v[a] := w
      c := |α| + 1-ní písmeno slovo(t)
      w[c] := u
      for all b ∈ Σ, b ≠ c do
        z := nový vrchol, uroven(z) := |α| + 1, Nal(z) := false, slovo(z) := αb,
        w[b] := z
      end for
      v := w
    end if
    {Správnému listu přiřaď x}
    d := |α| + 1-ní písmeno x
    s := v[d]
    uroven(s) := l, Nal(s) := true, slovo(s) := x
  end if
end if
```

Algoritmus 5.3 DELETE pro komprimované trie

```
{vyhledej x}
if Nal(t) ∧ slovo(t) = x then
  u := otec t
  i := uroven(u)
  Nal(t) := false
  uroven(t) := i + 1, slovo(t) := prefix slova x délky i + 1
  {vrchol u má alespoň jednoho syna, který není list s Nal = false}
  if všichni synové u kromě syna w jsou listy s Nal = false then
    v := otec u
    smaž u a všechny syny u kromě w
    j := uroven(v) + 1
    v[x_j] := w (tj. x_j-tý syn v je w)
  end if
end if
```

je funkce pref_{d-1} prostá. Tyto množiny získáme tak, že vybereme n prefixů délky $d-1$ a každý doplníme všemi sufixy délky $l-d+1$. Proto těchto množin je

$$\binom{k^{d-1}}{n} k^{n(l-d+1)}.$$

Protože všech podmnožin velikosti n je $\binom{k^l}{n}$ dostáváme, že

$$\begin{aligned} q_d &\leq 1 - \frac{\binom{k^{d-1}}{n} k^{n(l-d+1)}}{\binom{k^l}{n}} \\ &\leq 1 - \frac{k^{d-1}(k^{d-1}-1)\dots(k^{d-1}-(n-1))k^{n(l-d+1)}}{k^{ln}} \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{k^{d-1}}\right) \\ &\leq 1 - \exp\left(\frac{-n^2}{k^{d-1}}\right) \\ &\leq \frac{n^2}{k^{d-1}}, \end{aligned}$$

poněvadž

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{k^{d-1}}\right) &= \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{i}{k^{d-1}}\right)\right) \\ &\geq \exp\left(\int_0^n \ln\left(1 - \frac{i}{k^{d-1}}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-n^2}{k^{d-1}}\right), \end{aligned}$$

(užijte integrální kriterium a substituci $x = k^{d-1}(1-t)$) a $e^x - 1 \geq x$ (odtud $1 - e^x \leq -x$). Tedy pro $c = 2\lceil \log_k n \rceil$ dostáváme

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{d=1}^{c} q_d + \sum_{d=c+1}^{\infty} q_d \\ &\le c + \sum_{d=c}^{\infty} \frac{n^2}{k^d} \\ &\le 2\lceil \log_k n \rceil + \left(\frac{n^2}{k^c}\right) \sum_{d=0}^{\infty} k^{-d} \\ &\le 2\lceil \log_k n \rceil + \frac{1}{1-1/k} \\ &= 2\lceil \log_k n \rceil + \frac{k}{k-1}. \end{aligned}$$

Tedy očekávaný čas operace MEMBER je $O(log_k(n))$ $(O(\frac{\log n}{\log k}))$ a $O(log_k(n) + k)$ pro INSERT a DELETE pro komprimované trie (za předpokladů rovnoměrného rozložení vstupních dat) Zde parametr k vyjadřuje vztah mezi prostorovými a časovými nároky.

L.Prošek: Možná v té očekávané složitosti by šlo +k zanedbat, ale ne na základě toho tvrzení, které dokazuje jen očekávanou hloubku

XXX k čemu patří násl. algoritmus ? (Koubek 2002)

Algoritmus 5.4 INSERT pro komprimované trie (?)

INSERT($x = x_1, ..., x_l$)
t ← kořen
while t neni list **do**
  i ← hladina(t), t ← (a_{i+1})-ní syn t
end while
if prvek(t) neni prefix x **then**
  beta = nejvetsi spolecny prefix x a prvek(t)
  beta a = prefix alfa
  beta b = prefix prvek(t)
  while $hladina(t) > |beta|$ do t ← otec(t) done
  if hladina(t) ¡ —beta— **then**
    vytvoříme nový vrchol w, jehož synové, kromě b-tého syna budou listy s funkcemi Nal = false
    prvek(t) = beta + oznaceni syna
    $hladina(w) = |beta|, beta = (a_1, ..., a_i)$
    necht $v = a_{hladina(t)+1}$ - tý syn t, b-ty syn w je v
    $w = a_{hladina(t)+1}$-tý syn t
  end if
  z ← a-ty syn t, Nal(z) = true, prvek(z) = x
else
  Nal(t) = true, prvek(t) = x
end if

XXX dalsi neznamy algoritmus z prednasky 2002

5.3 Ještě komprimovanější trie

Př:
mějme násedující komprimovaný trie:

tady chybí obrázek

a jeho matici:

Algoritmus 5.5 DELETE pro komprimované trie (?)

DELETE($x = x_1, ..., x_l$)
  t ← kořen
  while t neni list **do**
    i ← hladina(t), t ← (a_{i+1}-ni syn t
  end while
  if Nal(t) = true a prvek(t) = j **then**
    Nal(t) = false
    v ← otec(t)
    prvek(t) ← prefix prvek(t) o délce hladina v+1
    if vsichni synove vrchovlu v az na jednoho jsou listy s Nal = false **then**
      w ← syn(v), ktery je bud list s Nal(w) = true nebo neni list
      necht v je a-tý (a_i-ty ???) syn svého otce, v smažeme a smažeme
      všechny syny $v \neq w$
      w ¡- a-tý (a_i-tý ???) syn otce v
    end if
  end if

	0	1	2
root	NIL	a	b
a	102	NIL	c
b	210	211	212
c	120	121	NIL

Chceme se zbavit položek NIL v matici reprezentující trie. Další komprese dosáhneme pomocí vektorů hod (vektor hodnot) a rd. Tyto vektory budou reprezentovat původní matici.

5.3.1 Popis A a rd

Zpět k našemu příkladu:

I.

hod	210	211	212	120	121	NIL
rd	root	a	b	c		
			0	3		

II.

hod	210	211	212	120	121	a	b	102	NIL	c
rd	root	a	b	c						
	4	7	0	3						

Řádek i začíná na místě rd(i) a musí být splněna podmínka:
Když $M_{i,j} \neq NIL \neq M_{i',j'}$, pak $rd(i) + j \neq rd(i') + j'$
Když na místě hod chceme zapsat prvek $\neq NIL$ a NIL, pak zapíšeme prvek $\neq NIL$.

5.3.2 Algoritmus pro hledání rd a hod

Nechť M je matice typu r x s, má m významných míst ≠ NIL.

- pro každý řádek nalezneme počet míst ≠ NIL
- setřídíme řádky Bucketsortem, tak že rádky s větším počtem míst ≠ NIL předcházejí řádky s menším počtem míst ≠ NIL
- procházíme řádky v daném setřídění a pro každý řádek i nalezneme nejmenší číslo rd(i), že nedochází ke kolizi s předchozími řádky (tj. když $M_{i',j'} \neq NIL \neq M_{i,j}$) a řádek i' byl zařazen, pak $rd(i) + j \neq rd(i') + j'$. Pak $M_{i,j} \neq NIL$ je uloženo ve vektoru hod na místě rd(i)+j.

m(l) - počet míst ≠ NIL v řádcích s počtem míst $\geq l+1 \neq NIL$.

Věta 5.3.1. *Když $m(l)(l+1) \leq m$ pro každé l, pak $rd(i) < m$ pro každý řádek i a algoritmus vyžaduje čas O(rsm).*

Důkaz. Předpokládejme, že hledáme rd pro řádek i, který má l míst $\neq NIL$.
ve vektoru hod je obsazeno méně než m(l-1) míst.
zkoušíme rd(i)=1,2,...
rd(i) = 1,2,... je zakázané, když vznikne kolize.
tj. ∃ řádek i' předcházející a $\exists j, j'$ takové, že $M_{i',j'} \neq NIL \neq M_{i,j}$ a platilo by $rd(i')+j' = rd(i)+j$.
← těchto možností je $< lm(l-1) \leq m$.
O(rs) - zjistíme pro každý řádek počet míst $\neq NIL$. O(m+r) - třídění Bucketsortem O(mrs) - krok 2 □

Př: jedna možnost
M =
← budeme mít moc řádků - nevhodné
Př:

M	0	1	2
root	NIL	a	b
a	102	NIL	c
b	210	211	212
c	120	121	NIL

rd	root	a	b	c						
	4	7	0	3						
hod	210	211	212	120	121	a	b	102	NIL	c

M'	0	1	2
b	210	211	212
c	120	121	NIL
root	NIL	a	b
a	102	NIL	c

(přehodili jsme pouze řádky)

210	NIL	NIL
120	211	212
NIL	121	NIL
102	a	b
NIL	NIL	c

5.3.3 Vertikální posun sloupců

cd - vektor sloupcového posunutí, slouží k zápisu transformace

	0	1	2
cd	0	1	2

	0	1	2	3	4
rd	6	0	6	3	6

hod	120	211	212	102	a	b	210	121	c

Jak najdeme nazpátek místa ? Platí, když $M_{i,j} \neq NIL$, pak $hod(rd(i + cd(j) + j)) = M_{i,j}$ je ten vzorec správně ?
značení:
f(-,-) je fce dvou proměnných
B_j matice posunutých prvních sloupců
m_j počet míst $\neq NIL$ v B_j
$m_j(l)$ počet míst $\neq NIL$ v řádcích matice B_j, které mají aspoň l+1 míst $\neq NIL$
Budeme chtít, aby $\forall j \forall l$ platilo $m_j(l) \leq \frac{m}{f(l,m_j)}$.
Okrajové podmínky na f: f musí splňovat:

- $\forall$ l platí $f(l,m) \geq l+1$
- $\forall$ j platí $f(0,m_j) \leq \frac{m}{m_j}$

Algoritmus na posunutí sloupců

1) pro každý sloupec v pořadí 0,1,... nalezneme nejmenší cd(j) takové, aby matice B_j splňovala $\forall l m_j(l) \leq \frac{m}{f(l,m_j)}$ (každý sloupec posunujeme dokud nesplňuje podmínku) na získanou matici $B = B_s$ pak použijeme předchozí algoritmus Platí $m(l) = m_s(l) \leq \frac{m}{f(l,m)} \leq \frac{m}{l+1}$ Hledáme hodnotu cd(j) a předp., že pro nějakou hodnotu cd(j) není splněna podmínka pro l, tj. platí $m_j(l) > \frac{m}{f(l,m)}$ ... platila pro $B_{j-1}, tj. m_{j-1}(l) \leq \frac{m}{f(l,m_{j-1})}$

Z toho plyne $m_j(l) - m_{j-1}(l) > \frac{m}{f(l,m_j)} - \frac{m}{f(l,m_{j-1}}$.

Jak roste číslo $m_j(l)$?

- v matici B_{j-1} existuje řádek s aspoň l+1 místy $\neq NIL$ a s tímto řádkem se střetne místo $\neq NIL$ (v j-tém sloupci $\leftarrow m_{j-1}(l)$ vzroste o 1)
- v matici B_{j-1} existuje řádek s l místy $\neq NIL$ a s tímto řádkem se střetne místo $\neq NIL$ v j-tém sloupci. Pak $m_{j-1}(l)$ vzroste o l+1.

střet - řádek v B_{j-1} s aspoň l místy $\neq NIL$ a místo $\neq NIL$ v j-tém sloupci. Aby nebyla splněna podmínka pro l, musí být počet střetů pro danou hodnotu cd(j) být aspoň

$$\frac{\frac{m}{f(l,m_j)} - \frac{m}{f(l,m_{j-1})}}{l+1}$$

V matici B_{j-1} je nejvýše $\frac{m_{j-1}(l-1)}{l} \leq \frac{m}{lf(l-1,m_{j-1}}$ řádků s aspoň l místy $\neq NIL$, v j-tém sloupci je $m_j - m_{j-1} mst \neq NIL$.
Podmínku pro l může zakázat nejvýše

$$\frac{\frac{m(m_j - m_{j-1})}{lf(l-1,m_{j-1}}}{\frac{\frac{m}{f(l,m_j}-\frac{m}{f(l,m_{j-1}}}{l+1}}$$

hodnot cd.

Stačí nám sčítat přes hodnoty l takové, že
$mm_{j-1}(l) \leq l-1$ tj. přes $l \leq l_0 = minl|\frac{m}{f(l,m_{j-1}} < l\ m_{j-1}(l) \leq \frac{m}{f(l,m_{j-1})} \leq l+1$.

Celkový počet zakázaných hodnot cd je menší než

$$\sum_{l=1}^{l_0} \frac{l+1}{l} \frac{(m_j - m_{j-1})}{\frac{f(l,m_{j-1}}{f(l,m_j)} - 1} \frac{f(l,m_{j-1}}{f(l-1,m_{j-1}} (*)$$

Zvolíme $f(l,m_j) = 2^{l(2-\frac{m_j}{m}}$ f splňuje okrajové podmínky $f(l,m) = 2^l \geq l+1 \forall l = 0,1,...$ "mystika"
$f(0,m_j) = 1 \leq \frac{m}{m_j} \forall j = 0,1,...,s$

dosadíme do odhadu (*) a dostaneme

$$\sum_{l=1}^{l_0} \frac{l+1}{l} \frac{(m_j - m_{j-1})}{2^{l(\frac{m_j}{m} - fracm_{j-1}m)}} 2^{(2-\frac{m_{j-1}}{m})} \leq$$

$$\sum_{l=1}^{l_0} \frac{l+1}{l} \frac{(m_j - m_{j-1})}{l(\frac{m_j}{m} - fracm_{j-1}m)} 4 =$$

$$\frac{4m}{ln(2)} \sum_{l=1}^{l_0} \frac{l+1}{l^2} = \frac{4m}{ln(2)} (\sum_{l=1}^{l_0} \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{l_0} \frac{1}{l^2}) \leq$$

$$\frac{4m}{ln(2)}(1 + ln(l_0)) + \frac{\pi^2}{6} \leq 4mlog_2(l_0) + 15.3m \quad (5.1)$$

$l_0 = minl; \frac{m}{f(l,m_{j-1}} < l \leftarrow l_0 < log(m) \leftarrow \leq 4mlog(log(m)) + 15.3m$

Celý algoritmus spočítá uložení matice M typu r x s do vrcholů cd - dimenze s, rd - dimenze $4mlog(log(m)) + 15.3m + r$ a hod dimenze m+s, přitom hodnoty $cd(j) < 4mlog(log(m)) + 15.3m$ a $rd(i) < m$.

Čas potřebný k výpočtu je $O(sr(mloglog(m))^2)$, kde m je počet míst $\neq NIL$ v matici M.

5.3.4 Úsporné uložení řídkého vektoru

Máme vektor v dimenze $n \cdot d$ a $i_0 < i_1 < ... < i_+$ jsou všechny indexy i takové, že $v(i) \neq 0$. Vytvoříme vektor cv dimenze t, $cv(j) = v(i_j)$. náš úkol - pro dané l zjistit, zda $l = i_j$ a případně nalézt toto j.

base - dimenze m

base(j) = $\begin{cases} \text{-1} & \text{když} \quad i_k \texttt{ div } d \neq j \forall k = 0, 1, ..., t-1 \\ minl; i_l div d = j & \text{když} \quad \exists l, \text{ že } i_l \texttt{ div } d = j \end{cases}$

vektor offset - dimenze n x d

offset(j, k) = $\begin{cases} \text{-1} & \text{když} \quad i_l \neq jd + k \forall l = 0, 1, ..., t-1 \\ l - base(j) & \text{když} \quad i_l = jd + k \end{cases}$

jd+k ... zápis v d-čkové soustavě

vektor off(j) = $\sum_{k=0}^{d-1}(offset(j,k) + 1)(d+1)^k$

off je dimenze n

smysluplné když $d << n \cdot a \cdot t < n$ (např. $d = log(log(n))$)

Kapitola 6

Uspořádaná pole

6.1 Unární, binární a interpolační vyhledávání

Napsal Pavel Machek

Uspořádané pole je datová struktura, která vznikne z pole jeho setříděním. Jediná operace, která se na ní dá (rozumně rychle) provádět, je MEMBER.

Mějme slovník S uložený jako pole prvků tak, že $s[i] < s[i+1]$.

Algoritmus 6.1 MEMBER pro uspořádané pole

{vyhledání hodnoty x mezi $s[i] \dots s[j]$}
{odpověď ANO, když $\exists h : i \leq h \leq j \wedge s[h] = x$}
$d := i$ {aktuální dolní a horní odhad}
$h := j$
$next := f(d, h)$ { Předpokládáme, že $d \leq f(d, h) \leq h$ }
while $s[next] \neq x \wedge d < h$ **do**
  if $s[next] < x$ **then**
    $d := next + 1$
  else
    $h := next - 1$
  end if
  $next := f(d, h)$
end while
{řekni ANO pokud $s[next] = x$, jinak řekni ne}

Tento algoritmus může provádět unární, binární, nebo interpolační vyhledávání; stačí jen dosadit správnou funkci f; zobecněné kvadratické vyhledávání bude definováno dále:

metoda	**odpovídající funkce**	nejhorší př.	průměrný případ
unární vyhledávání	$f(d, h) = d$	$O(n)$	$O(n)$
binární vyhledávání	$f(d, h) = \lceil \frac{d+h}{2} \rceil$	$O(\log(n))$	$O(\log(n))$
interpolační vyhledávání	$f(d, h) = d + \lceil \frac{x - s[d]}{s[h] - s[d]} * (h - d + 1) \rceil$	$O(n)$	$O(\log(\log(n)))$
zobecněné kvadratické v.	$f(d, h) = fkvadrat$	$O(\log(n))$	$O(\log(\log(n)))$
kvadratické vyhledávání		$O(\log(n))$	$O(\log(\log(n)))$

Z těch zápisků, co mám, to opravdu vypadá, jako že zobecněné kvadratické a kvadratické jsou 2 různé věci

6.2 Zobecněné kvadratické vyhledávání

algoritmus vychází z Pavlova, výklad napsal Jakub Černý

Na interpolačním vyhledávání se nám líbí jeho čas $O(\log\log|S|)$ v průměrném případě (při rovnoměrném rozdělení dat). Avšak jeho čas v nejhorším případě je až $O(|S|)$. Zato binární vyhledávání má čas nejvýše $O(\log|S|)$. Zobecněné kvadratické vyhledávání je tak trochu kombinace předchozích dvou vyhledávání.

Jak zobecněné kvadratické vyhledávání funguje? Využívá funkci MEMBER s funkcí *fkvadrat* tak, jak byla popsána v předchozím odstavci. Tomu, že se zvolí hodnota $next$ a podle ní se opraví hodnota d nebo h, budeme říkat, že se položí dotaz. Celé vyhledávání funguje tak, že se nejprve položí interpolační dotaz. To je vždy, když je $nastav$ true. Položení dalších dotazů si můžeme představovat jako skoky z místa posledního dotazu ve směru, kde leží x. (Skočíme na nový index v poli). [1] Po interpolačním dotazu se neustále střídají skoky o $\sqrt{delka}$ s binárními dotazy, až dokud nepřeskočíme x. (Toto střídání zajišťuje proměnná $parita$). Pak se znova položí interpolační dotaz a vše se opakuje.

Algoritmus 6.2 Krok zobecněného kvadratického vyhledávání — $fkvadrat(d, h)$

{Proměnné $nastav$, $parita$ a $nahoru$ jsou statické, tj. jejich hodnoty se mezi voláními tohoto algoritmu zachovávají.}
{Nechť $nastav$ je na začátku *true*.}
{Dokud je $nastav$ *false* (pracuje se v rámci bloku), je $parita$ střídavě *true* (skok o $\sqrt{delka}$) a *false* (binární vyhledání)}
if $nastav$ **then**
  $parita := true$
  $delka := h - d + 1$
  $next := d + \left\lceil \frac{x - s[d]}{s[h] - s[d]} \cdot delka \right\rceil$ $\{= finterp(d, h)\}$
  $nahoru := s[next] < x$
  $nastav := false$
  return $next$
end if
if not $parita$ **then**
  $next := \lceil (d + h)/2 \rceil$ $\{= fbin(d, h)\}$
  $parita := true$
  return $next$
end if
$next := nahoru\ ?\ d + \sqrt{delka} : h - \sqrt{delka}$
if $s[next] < x$ xor $nahoru$ **then**
  $nastav := true$
else
  $parita := false$
end if
return $next$

Jaký čas má vyhledávání v nejhorším případě? Rozdíl mezi d a h se během nejvýše 3 dotazů zmenší na polovinu. Proto je nejhorší čas $O(\log n)$.

Jaký čas má vyhledávání v průměrném případě? Tím myslíme při rovnoměrném rozložení dat. To už je malinko složitější otázka. Vyhledávání si rozdělíme do několika fází. Fáze začíná interpolačním dotazem a pokračuje až do dalšího interpolačního dotazu. Ukážeme, že v jedné fázi se položí v průměru jen konstantně dotazů. Pojďme tedy analyzovat jednu fázi. Souvislý úsek pole mezi pozicemi d a h na začátku fáze označme jako blok. Proměnná $delka$ udává délku bloku a má hodnotu $h-d+1$. Označme X náhodnou proměnnou, $X =$ počet i na začátku bloku takových, že $i \geq d$ a $s[i] < x$. Jinak řečeno X udává vzdálenost x od začátku bloku.

Položme $p = \mathcal{P}$(náhodně zvolený prvek mezi $s[d]$ a $s[h]$ je menší než x) $= (x - s[d])/(s[h] - s[d])$

$$\mathcal{P}(|X| = j) = \binom{h-d+1}{j} p^j (1-p)^{h-d+1-j}$$

X má tedy binomické rozdělení a tudíž je jeho očekávaná hodnota $p(h - d + 1)$ a jeho rozptyl je $p(1-p)(h-d+1)$. Označme prv pozici v rámci bloku prvního (interpolačního) dotazu. Srovnej

[1] zde by byl vhodný obrázek - usečka, která má na krajich d a h a je na ni videt prvni interpolačni dotaz a skoky po sqrt(n) a bin. a sqrt(n) ...

prv s očekávanou hodnotou X.

$$|X - prv| \geq \frac{\text{počet dotazů v rámci bloku} - 2}{2}\sqrt{delka}$$

protože když vynecháme první dva dotazy, tak se dále střídá binární dotaz se skokem o $\sqrt{delka}$. Vynecháme-li i binární dotazy—vezmu každý druhý—zůstanou jen skoky o $\sqrt{delka}$ a ty dohromady naskáčou méně než je vzdálenost x od prvního dotazu.

Označme $p_i = \mathcal{P}(\text{v rámci bloku bylo položeno alespoň } i \text{ dotazů})$. Pak jistě platí

$$\mathcal{P}(\,|X - prv| \geq \frac{i-2}{2}\sqrt{delka}) \geq p_i$$

Nyní použijeme Čebyševovu nerovnost, která říká, že

$$\mathcal{P}(\,|X - EX| > t) \leq \frac{\text{rozptyl } X}{t^2}$$

$$p_i \leq \mathcal{P}(\,|X - prv| \geq \frac{i-2}{2}\sqrt{delka}) \leq \frac{p(1-p)\;delka}{(\frac{i-2}{2})^2\;delka} \leq \frac{1}{(i-2)^2}$$

protože prv je očekávaná hodnota X a $p(1-p) \leq 1/4$ pro $0 \leq p \leq 1$. Celkem jsme dostali $p_i \leq 1/(i-2)^2$.

Očekávaný čas pro práci v jednom bloku (pro jednu fázi) je $O(\text{očekávaný počet dotazů v bloku}) = O(\sum_{i=0}^{\infty} p_i) = O(\,3 + \sum_{i=3}^{\infty} 1/(i-2)^2) = O(\,3 + \pi^2/6) = O(4.6)$. To jsme pouze odhadli první tři členy jedničkou a sečetli řadu, kterou asi znáte z analýzy.

Teď už snadno dopočítáme očekávaný čas zobecněného kvadratického vyhledávání. Ten je $O(\,(\text{počet bloků})\,(\text{očekávaný čas pro 1 blok})) = O(\,\log\log(|S|)\,O(1)) = O(\,\log\log(|S|))$. Kde jsme vzali počet bloků? Ten je určitě menší než počet dotazů v interpolačním vyhledávání (jen interpolační dotazy).

Kapitola 7

Binární stromy

7.1 Obecně

7.1.1 Algoritmus MEMBER

7.1.2 Algoritmus INSERT

7.1.3 Algoritmus DELETE

7.2 Optimální binární vyhledávací stromy

7.2.1 Algoritmus konstrukce

7.2.2 Snížení složitosti z kubické na kvadratickou

7.3 Skorooptimální binární vyhledávací stromy

Jenom že existují, lineární konstrukce. Aha — viz cvičení.

7.4 Červenočerné stromy

Každý vrchol je obarven červeně nebo černě a platí následující podmínky:

- 1 Listy jsou černé.
- 2 Pokud má červený vrchol otce, je otec černý.
- 3 Všechny cesty z kořene do listu mají stejný počet černých vrcholů.

Pro binární vyhledávací červenočerné stromy reprezentující množinu S platí: je-li k počet černých vrcholů na cestě z kořene do listu, pak

$$2^k - 1 \leq |S| \leq 2^{2k} - 1$$

neboli

$$k \leq \log_2 |S| + 1 \leq 2k$$

přičemž prvky S jsou reprezentovány pouze ve vnitřních vrcholech, ne v listech. je to novinka?

7.4.1 Operace INSERT

Uvedeme pouze odlišnost od operace INSERT v obecném binárním vyhledávacím stromě.

Situace: list t se změnil na vnitřní vrchol reprezentující prvek x a přidali jsme mu 2 listy.

Vrchol t obarvíme červeně a jeho syny černě. Podmínky 1 a 3 stále platí, ale podmínka 2 platit nemusí.

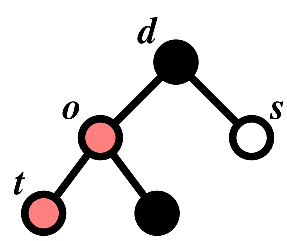
Definice 7.4.1. Strom a jeho vrchol (T, t) nazveme *2-téměř červenočerný strom (2tččs)*, jestliže platí

- 1 Listy jsou černé. *(nezměněno)*
- 2' Pokud má červený vrchol *různý od* t otce, je otec černý.
- 3 Všechny cesty z kořene do listu mají stejný počet černých vrcholů. *(nezměněno)*

Srovnej: Každý červený vrchol různý od t má černého otce.

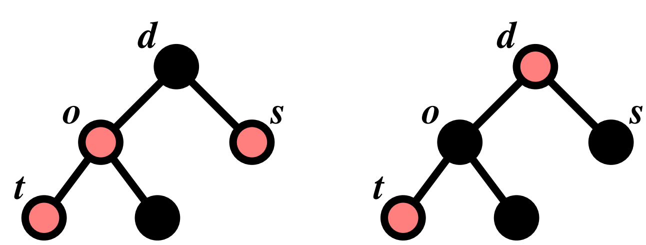
Definice 7.4.2. Je-li vrchol t červený a jeho otec je také červený, pak řekneme, že t je *porucha*.

Tedy nyní máme 2tččs (T, t) Je-li t porucha, pak ji musíme nějak opravit. Situace je na obrázku 7.1. Nejprve záleží na tom, jakou barvu má s, strýc t:



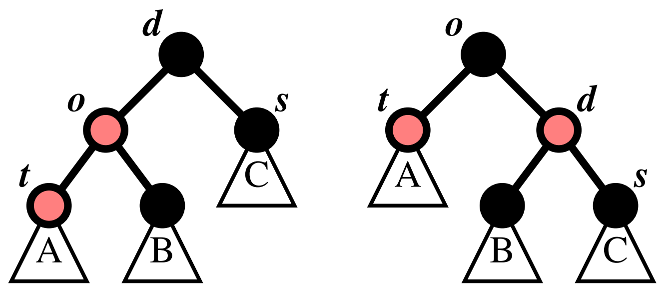
Obrázek 7.1: Obecná situace při INSERTu

1. s je červený. Pak pouze přebarvíme o, d a s podle obrázku 7.2. Podmínky 1 a 3 jsou splněny. Nyní d může být porucha, ovšem posunutá o 2 hladiny výše. Vznikl 2tččs (T, d).

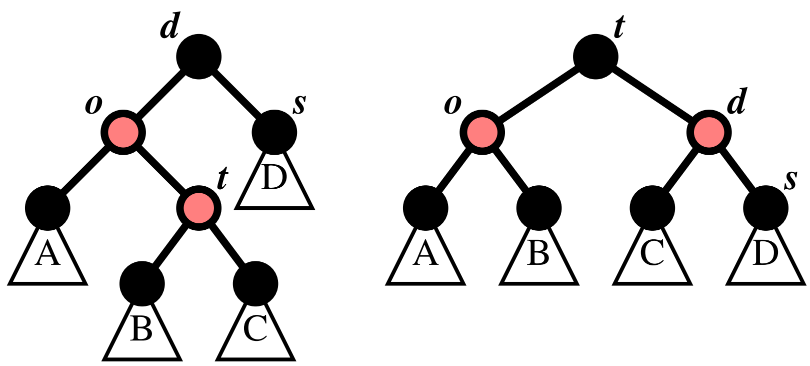


Obrázek 7.2: Oprava INSERTu přebarvením

2. s je černý. Záleží na tom, zda hodnota t leží mezi hodnotami o a d nebo ne. Jinými slovy, zda cesta t-o-d obsahuje zatáčku.
   (a) Bez zatáčky: Provedeme rotaci a přebarvíme podle obrázku 7.3. Splněny budou podmínky 1, 2 i 3, tedy máme červenočerný strom.
   (b) Se zatáčkou: Provedeme dvojitou rotaci a přebarvíme podle obrázku 7.4. Splněny budou podmínky 1, 2 i 3, opět máme rovnou červenočerný strom.



Obrázek 7.3: Oprava INSERTu rotací a přebarvením



Obrázek 7.4: Oprava INSERTu dvojitou rotací a přebarvením

7.4.2 Operace DELETE

Zatímco INSERT se příliš nelišil od své obdoby u AVL stromů, operace DELETE u červenočerných stromů je oproti AVL stromům složitější mentálně, ovšem jednodušší časově.

Situace: odstraňujeme vrchol t (který nemusí reprezentovat odstraňovaný prvek — viz DELETE v obecných binárních vyhledávacích stromech) a jeho syna, který je list.

Druhého syna t, u, dáme na místo smazaného t a začerníme ho. Tím máme splněné podmínky 1 a 2. Pokud byl ale t černý, chybí nám na cestách procházejících nyní u jeden černý vrchol.

Definice 7.4.3. Strom a jeho vrchol (T, u) nazveme *3-téměř červenočerný strom (3tččs),* jestliže platí

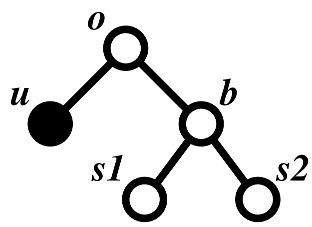
- 1 Listy jsou černé. *(nezměněno)*
- 2 Pokud má červený vrchol otce, je otec černý. *(nezměněno)*
- 3' Všechny cesty z kořene do listu neprocházející u mají stejný počet černých vrcholů, nechť je to k. Všechny cesty z kořene do listu procházející u mají stejný počet černých vrcholů, nechť je to ℓ. A platí $k - 1 \leq \ell \leq k$.

Když u není kořen a $\ell < k$, pak řekneme, že u je *porucha.*

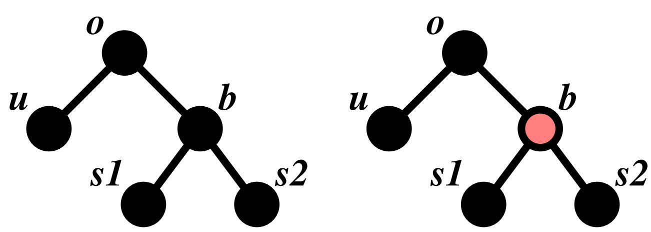
Nechť vrchol u je porucha. Pak můžeme předpokládat, že je obarven černě, jinak bychom ho přebarvili na černo a tím by se porucha odstranila a vznikl červenočerný strom.

Situace: máme 3tččs (T, u), u je porucha s otcem o, bratrem b a synovci $s1$, $s2$, viz obrázek 7.5. Oprava záleží na barvě b:

1. Bratr je černý. Rozlišujeme dále 4 případy, z nichž jeden propaguje poruchu o hladinu výš a ostatní skončí s červenočerným stromem.
   (a) Otec i synovci jsou černí. Přebarvíme b na červeno, viz obrázek 7.6. Dostáváme 3tččs (T, o), tedy porucha je o hladinu výše.

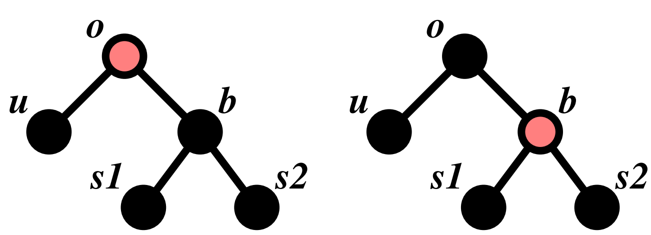


Obrázek 7.5: Obecná situace při DELETE



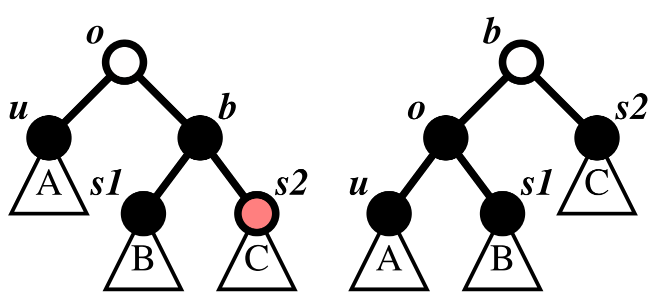
Obrázek 7.6: Částečná oprava DELETE přebarvením

(b) Otec je červený, synovci černí. Přebarvíme otce a bratra podle obrázku 7.7 a dostáváme červenočerný strom.



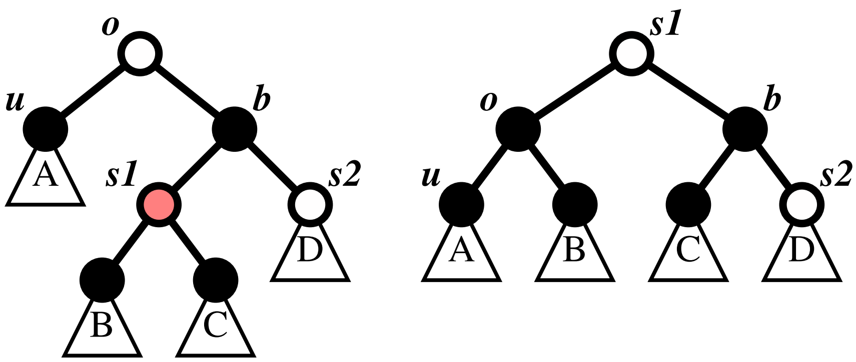
Obrázek 7.7: Oprava DELETE přebarvením

(c) Synovec $s1$, jehož hodnota leží mezi hodnotami otce a bratra, je černý, druhý synovec je červený. Přebarvíme a zrotujeme podle obrázku 7.8, barva otce se nemění (tj., vrchol b bude mít barvu, kterou původně měl vrchol o). Dostáváme červenočerný strom.



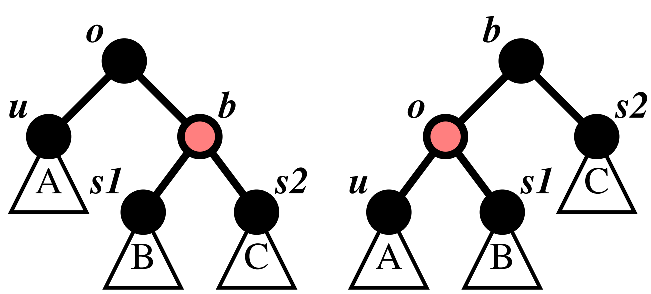
Obrázek 7.8: Oprava DELETE přebarvením a rotací

(d) Synovec $s1$, jehož hodnota leží mezi hodnotami otce a bratra, je červený, druhý synovec má libovolnou barvu. Přebarvíme a dvojitě zrotujeme podle obrázku 7.9 (tj., vrchol $s1$ bude mít barvu, kterou původně měl vrchol o a barva vrcholu $s2$ se nezmění). Dostáváme červenočerný strom.



Obrázek 7.9: Oprava DELETE přebarvením a dvojitou rotací

2. Bratr je červený. Přebarvíme a zrotujeme podle obrázku 7.10. Dostáváme 3tččs (T, u), přičemž porucha je o hladinu níže. I když to tak na první pohled nevypadá, máme vyhráno, protože bratr poruchy je černý a otec červený, tedy příští oprava bude případ 1b, 1c, nebo 1d a skončíme s červenočerným stromem.



Obrázek 7.10: Částečná oprava DELETE přebarvením a rotací

7.4.3 Závěry

Pro binární vyhledávací červenočerné stromy lze implementovat MEMBER, INSERT a DELETE tak, že vyžadují čas $O(\log n)$ a INSERT používá nejvýše jednu (dvojitou) rotaci a DELETE používá nejvýše dvě rotace nebo rotaci a dvojitou rotaci.

Jsou lepší než AVL stromy, které při DELETE spotřebují až $\log n$ rotací. Oproti váhově vyváženým stromům i proti AVL stromům jsou červenočerné stromy jen konstantně lepší, ale i to je dobré. Při použití binárních vyhledávacích stromů ve výpočetní geometrii nese informaci i rozložení prvků ve stromě, a tato informace se musí po provedení rotace nebo dvojité rotace aktualizovat. To znamená prohledání celého stromu a tedy čas $O(n)$ za každou rotaci a dvojitou rotaci navíc. Pro tyto problémy jsou červenočerné stromy obzvláště vhodné, protože minimalizují počet použitých rotací a dvojitých rotací.

Červenočerné stromy se používají při implementaci $(2, 4)$-stromů, se kterými se seznámíme v další kapitole. Vrchol se dvěma syny je nahrazen jedním černým vrcholem, vrchol se třemi syny je nahrazen černým vrcholem s jedním červeným synem a vrchol se čtyřmi syny je nahrazen černým vrcholem se dvěma syny. Pozor! Aktualizační operace pro $(2, 4)$-stromy neodpovídají aktualizačním operacím na červenočerných stromech (i reprezentace prvků je odlišná).

Červenočerné stromy se používají například ve standardní šablonové knihovně jazyka C++ od SGI, která je zahrnuta do GCC. Máte-li Linux, zkuste se podívat do `/usr/include/g++-2/stl_tree.h`. [1]

[1] A pokud víte o podobně dostupných implementacích jiných datových struktur z téhle přednášky, sem s nimi!

Kapitola 8

(a, b) stromy

8.1 Základní varianta

Nechť $a, b \in \mathbb{N}, a \leq b$. Strom je (a, b) strom, když platí

1. Každý vnitřní vrchol kromě kořene má alespoň a a nejvýše b synů.
2. Kořen má nejvýše b synů. Pokud $a \geq 2$, pak má alespoň 2 syny, nebo je listem.
3. Všechny cesty z kořene do listu jsou stejně dlouhé.

Cvičení: Co by se stalo, kdybychom zjednodušili a místo podmínek 1 a 2 požadovali, aby *každý* vrchol měl a až b synů?

Definice 8.1.1. Jsou-li synové každého vrcholu očíslováni, můžeme definovat *lexikografické uspořádání vrcholů na stejné hladině.*

$u \leq_l v$, jestliže otec $u <_l$ otec v nebo otec $u =$ otec v, u je i-tý syn, v je j-tý syn a $i \leq j$.

Pozorování: Buď T (a, b) strom s hloubkou h. Platí

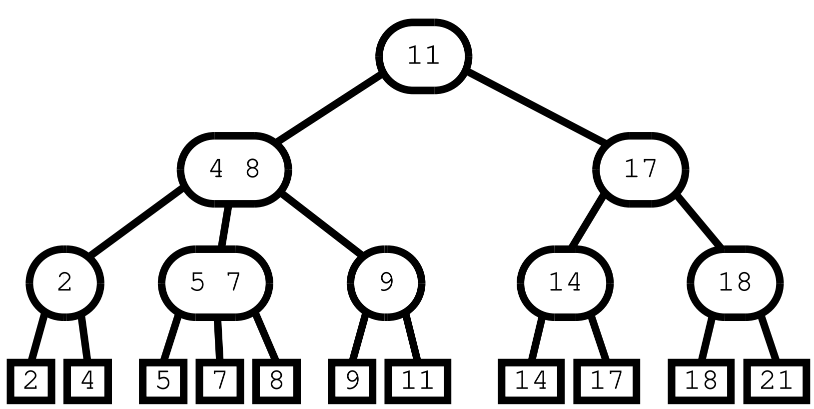
$$2a^{h-1} \leq \text{počet listů } T \leq b^h,$$

tedy pro libovolné n má každý (a, b) strom T s n listy hloubku $\Theta(\log n)$.

8.1.1 Reprezentace množiny S (a, b) stromem

Mějme $S \subseteq U$, přičemž universum je lineárně uspořádané. (a, b) strom T reprezentuje množinu S, jestliže existuje jednoznačné přiřazení prvků S listům T, které zachovává uspořádání.

Potřebujeme navíc podmínku



Obrázek 8.1: Příklad (a, b) stromu

4. $a \geq 2$ a $b \geq 2a - 1$

Struktura vnitřního vrcholu v:

- ρ_v je počet synů
- $S_v[1 \mathinner{..} \rho_v]$ je pole ukazatelů na syny
- $H_v[1 \mathinner{..} \rho_v - 1]$: $H_v[i]$ je maximální prvek v podstromu $S_v[i]$

8.1.2 MEMBER(x) v (a, b) stromu

{vyhledání x}
$t :=$ kořen
while t není list **do**
  $i := 1$
  while $H_t[i] < x \wedge i < \rho_t$ **do**
    $i := i + 1$
  end while
  $t := S_t[i]$
end while
{testování x}
if t reprezentuje x **then**
  $x \in S$
else
  $x \notin S$
end if

8.1.3 INSERT(x) do (a, b) stromu

vyhledání x
if t nereprezentuje x **then**
  $o :=$ otec t
  vrcholu o přidej nového syna t' reprezentujícího x
  zařaď t' na správné místo mezi jeho bratry a uprav ρ_o, S_o a H_o
  $t := o$
  while $\rho_t > b$ **do**
    {Štěpení — můžeme provést díky podmínce 4}
    rozděl t na t_1 a t_2
      k t_1 dej prvních $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ synů t
      k t_2 dej zbylých $\lceil (b+1)/2 \rceil$ synů t
    $o :=$ otec t
    uprav ρ_o, S_o a H_o
    {při štěpení kořene ještě musíme vytvořit nový kořen}
    $t := o$
  end while
end if

8.1.4 DELETE(x) z (a, b) stromu

vyhledání x, navíc si zapamatuj vrchol u, v jehož poli H_u je x
if t reprezentuje x **then**
  $o :=$ otec t
  odstraň t
  uprav H_o, H_u {...}
  uprav S_o a ρ_o

$t := o$
while $\rho_t < a \wedge t$ není kořen **do**
$v :=$ bezprostřední bratr t
if $\rho_v = a$ **then** {smíme spojit}
{Spojení}
$o :=$ otec t
sluč v a t do t
uprav ρ_o, S_o a H_o
$t := o$
else {$\rho_v > a$, spojení by mohlo mít více než b synů}
{Přesun}
přesuň krajního syna v do t
uprav $H_{\text{otec } t}$
end if
end while
if t je kořen a má jen jednoho syna **then**
smaž t
end if
end if

8.1.5 Shrnutí

Operace štěpení, přesun i spojení vyžadují konstantní čas.

Věta 8.1.1. *Operace MEMBER, INSERT a DELETE pro (a, b) stromy vyžadují čas $O(\log n)$, kde n je velikost reprezentované množiny.*

S H a S jsme pracovali jako se seznamy, nepotřebujeme, aby to byla pole. Tím se zjednoduší implementace.

Výhodnost pro vnější paměti?

8.1.6 Jak volit parametry (a, b)

Pro vnitřní paměť je vhodné $a = 2$ nebo $a = 3$, $b = 2a$. Pro vnější paměť je vhodné $a \approx 100$, $b = 2a$.

Pro minimalizaci paměťových nároků je výhodné $b = 2a - 1$, pro minimalizaci časových nároků je výhodné $b = 2a$.

proč? prý se k tomu ještě dostaneme

8.2 Další operace

Pro operaci JOIN je vhodné spolu se stromem uchovávat také největší prvek reprezentované množiny.

8.2.1 Algoritmus JOIN(T_1, T_2) pro (a, b) stromy

Require: T_1 reprezentuje S_1, T_2 reprezentuje S_2 a $\max S_1 < \min S_2$
$n :=$ hloubka $T_1 -$ hloubka T_2
if $n \geq 0$ **then**
$t :=$ kořen T_1
while $n > 0$ **do**
$t :=$ poslední syn t
$n := n - 1$
end while
Spoj t s kořenem T_2 a vytvoř nový vrchol t'. {zde se využije znalost největšího prvku množiny S_1}

while $\rho_t > b$ **do**
Štěpení t
$t :=$ otec t
end while
else
{analogicky: kořen T_2, první syn ...}
end if

JOIN vyžaduje čas O(rozdíl hloubek stromů) $\leq O(\log(|S_1| + |S_2|))$.

8.2.2 Algoritmus SPLIT(x, T) pro (a, b) strom

Ensure: Vytvoří T_1 reprezentující $\{s \in S : s < x\}$ a T_2 reprezentující $\{s \in S : s > x\}$
Nechť Z_1 a Z_2 jsou prázdné zásobníky
$t :=$ kořen T
while t není list **do**
$i := 1$
while $H_t[i] < x \wedge i < \rho_t$ **do**
$i := i + 1$
end while
Vytvoř strom T_1, jehož kořen má syny $S_t[1] \dots S_t[i-1]$
Vytvoř strom T_2, jehož kořen má syny $S_t[i+1] \dots S_t[\rho_t]$
if T_1 není jednoprvkový strom **then**
Push(Z_1, T_1)
end if
if T_2 není jednoprvkový strom **then**
Push(Z_2, T_2)
end if
$t := S_t[i]$
end while
if t reprezentuje prvek různý od x **then**
Udělej z t (a, b) strom a vlož ho do příslušného zásobníku.
end if
$T_1 :=$ STACKJOIN(Z_1) {viz dále}
$T_2 :=$ STACKJOIN(Z_2)

Čas rozřezávání stromu je úměrný jeho hloubce. Celkový čas operace SPLIT ovšem závisí ještě na složitosti operace STACKJOIN.

8.2.3 Algoritmus STACKJOIN(Z) pro zásobník (a, b) stromů

$T :=$ Pop(Z)
while $Z \neq \emptyset$ **do**
$T' :=$ Pop(Z)
$T :=$ JOIN(T, T')
end while

Nechť Z obsahuje (a, b) stromy $T_1 \dots T_k$, přičemž T_1 je vrchol zásobníku. Platí

$$\forall i: \text{ hloubka } T_i \leq \text{hloubka } T_{i+1}$$

$$\begin{aligned}\text{čas STACKJOIN} &= \text{hloubka } T_2 - \text{hloubka } T_1 + 1\\ &+ \text{hloubka } T_3 - \text{hloubka } T_2 + 1\\ &+ \dots\\ &+ \text{hloubka } T_k - \text{hloubka } T_{k-1} + 1\\ &= \text{hloubka } T_k - \text{hloubka } T_1 + \text{počet JOINů}\\ &= O(\text{hloubka } T) = O(\log |S|)\end{aligned}$$

Tedy i operace SPLIT vyžaduje čas $O(\log |S|)$.

8.2.4 Algoritmus FIND(T, k) pro (a, b) strom

Nalezení k-tého nejmenšího prvku.

Rozšíříme reprezentaci stromu a každému vnitřnímu vrcholu v přidáme:

- $K_v[1 .. \rho_v]$: $K_v[i]$ je počet listů v podstromu $S_v[i]$

```
t := kořen T
while t není list do
  i := 1
  while K_t[i] < k ∧ i < ρ_t do
    k := k − K_t[i]
    i := i + 1
  end while
  t := S_t[i]
end while
if k > 1 then
  return nil {k > |S|}
else
  return t
end if
```

Časová složitost je opět logaritmická, přičemž dříve uvedené operace nejsou zpomaleny tím, že aktualizují pole (seznam) K.

8.2.5 A-sort

Na první pohled se zdá, že použití (a, b) stromů ke třídění není výhodné. Paměťové nároky budou oproti běžnému třídění v poli asi pětkrát větší. Aby se tedy třídění (a, b) stromem vyplatilo, muselo by přinést zvýšení rychlosti. V této části předvedeme, že to skutečně je možné, jestliže vstupní data jsou již částečně setříděná.

Pro účely A-sortu rozšíříme reprezentaci takto:

- Listy stromu jsou propojeny do seznamu
- Je známa cesta z nejmenšího (nejlevějšího) listu do kořene (uložená např. v zásobníku)

Použijeme $(2, 3)$-strom. proč?

Nechť vstupní posloupnost je $a_1, \dots, a_n$. Postupně odzadu vkládáme její prvky do stromu modifikovaným INSERTem:

```
k := n
while k > 1 do
  A-INSERT(a_k)
  k := k − 1
end while
```

Na konci přečteme setříděnou posloupnost pomocí spojového seznamu listů.

A-INSERT, stejně jako původní INSERT, najde správný list a potom případně přidá nový prvek. K nalezení správného listu ovšem využívá cestu z nejmenšího listu. Zde uvedená verze A-INSERTu odstraňuje duplicitní prvky, operaci lze pochopitelně upravit tak, že nechává duplicitní prvky, které zůstávají ve stejném pořadí.

{Nalezení}
$t :=$ nejmenší list
repeat
  $t :=$ otec t
until t je kořen $\vee\, x \le H_t[1]$
{nyní jako v původním INSERTu, pouze jsme jinak inicializovali t}
while t není list **do**
  $i := 1$
  while $H_t[i] < x \wedge i < \rho_t$ **do**
    $i := i + 1$
  end while
  $t := S_t[i]$
end while
{Přidání}
if t nereprezentuje x **then**
  $o :=$ otec t
  vrcholu o přidej nového syna t' reprezentujícího x
  zařaď t' na správné místo mezi jeho bratry a uprav ρ_o, S_o a H_o
  $t := o$
  while $\rho_t > b$ **do**
    {Štěpení — můžeme provést díky podmínce 4}
    rozděl t na t_1 a t_2
      k t_1 dej prvních $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ synů t
      k t_2 dej zbylých $\lceil (b+1)/2 \rceil$ synů t
    $o :=$ otec t
    uprav ρ_o, S_o a H_o
    {při štěpení kořene ještě musíme vytvořit nový kořen}
  end while
end if

Čas A-sortu = $\sum$ času vyhledání + $\sum$ času přidání + čas vytvoření výstupní posloupnosti. Čas vytvoření výstupní posloupnosti = $O(n)$.

$\sum$ času přidání = počet přidaných vrcholů $\cdot$ čas přidání vrcholu + počet štěpení $\cdot$ čas štěpení = $O(n) \cdot O(1)$ + počet štěpení $\cdot\, O(1)$. Protože se zde neprovádí operace DELETE, lze každému štěpení přiřadit vnitřní vrchol, který byl při tomto štěpení vytvořen (štěpení rozdělí vrchol t na dva vrcholy t_1 a t_2, budeme předpokládat, že vrchol t_1 je pokračováním vrcholu t a vrchol t_2 je vrchol vzniklý při štěpení). Tedy počet štěpení je menší než počet vnitřních vrcholů (při štěpení kořene vzniká navíc ještě nový kořen), tedy $\sum$ času přidání = $O(n)$.

Čas A-sortu tedy závisí hlavně na celkovém čase vyhledání prvků. Označme

$$f_i = |\{j > i : \ a_j < a_i\}|,$$

tedy počet prvků posloupnosti, které v nesetříděné posloupnosti následují a_i, ale v setříděné patří před a_i. Při vyhledání a_i ve stromu vyjadřuje f_i počet listů nalevo od a_i. Čas vyhledání a_i je tedy $O(\log f_i)$ a celkový čas vyhledání je $O(\sum \log f_i)$. ošetřit log 0

Hodnota $F = \sum f_i$, zvaná *počet inverzí*, vyjadřuje uspořádanost vstupní posloupnosti. Pro správně uspořádanou posloupnost je $F = 0$, pro obráceně uspořádanou posloupnost je $F = n(n-1)/2$. To jsou také mezní hodnoty, jichž může F nabývat. nebo transpozic? standardní termín?

Z vlastností logaritmu a srovnáním geometrického a aritmetického průměru dostáváme

$$\sum \log f_i = \log \prod f_i = n \log \sqrt[n]{\prod f_i} \le n \log(F/n).$$

A-sort tedy vyžaduje čas $O(n \max(1, \log((F+1)/n)))$. V nejhorším případě to je $O(n \log n)$ a Mehlhorn a Tsakalidis ukázali, že A-sort je lepší než Quicksort v případě, že $F \leq 0.02n^{1.57}$. Naproti tomu Insertsort, jednoduchý algoritmus, který postupně lineárním prohledáním zatřiďuje prvky pole do jeho již setříděného počátečního úseku, vyžaduje čas $O(n+F)$, což je v nejhorším případě $O(n^2)$.

Zbývá ještě zdůvodnit, proč použít $(2,3)$-stromy. Víme, že $(2,3)$-stromy mají nejmenší prostorové nároky mezi (a,b)-stromy. Na druhé straně však $(2,3)$-stromy v obecném přépadě vyžadují zbytečně mnoho vyvažovacích operací, a proto jsou výrazně pomalejší než např. $(2,4)$-stromy. Protože však A-sort nepoužívá operaci DELETE, ukázali jsme (viz počet operací Štěpení), že pro A-sort to není pravda. Zde $(2,3)$-stromy patří mezi nejrychleji pracující (a,b)-stromy.

8.3 Paralelní přístup do (a,b) stromů

Při operacích INSERT a DELETE jsme nejprve sestupovali stromem dolů až k listům, potom jsme se vraceli nahoru a štěpili nebo spojovali vrcholy. To znemožňuje dovolit paralelní přístup do stromu. Procesu, který je ve fázi vyhledání, by se mohlo stát, že mu jiný proces změní strom "pod rukama". Stávající operace INSERT a DELETE tedy požadují výlučný přístup ke stromu.

Nyní předvedeme paralelní verzi těchto operací, kde se štěpení nebo spojování provádí již při sestupu. Potom již není nutné se vracet a je tedy možné rovnou odemykat části stromu, ke kterým již daný proces nebude přistupovat. Cenou za tento přístup jsou zbytečná štěpení/spojení. udělat obrázek ilustrující zbytečná š/s

Potřebujeme omezit b: podmínku $b \geq 2a-1$ zpřísníme na

4'. $a \geq 2$ a $b \geq 2a$

8.3.1 Paralelní INSERT(x) do (a,b) stromu

$o :=$ lock(nadkořen) {Nadkořen je implementační pomůcka. Slouží k zamknutí přístupu k celému stromu a uchovává max(S)}
$t :=$ kořen
{Invariant mezi průchody cyklem: o je otec t, o je jediný vrchol zamknutý tímto procesem.}
while t není list **do**
  $i := 1$
  while $i < \rho_t \wedge H_t[i] < x$ **do**
    $i := i + 1$
  end while
  $s := S_t[i]$
  {preventivní rozštěpení:}
  if $\rho(t) = b$ **then**
    rozděl t na t_1 a t_2: {viz 4'}
      k t_1 dej prvních $\lfloor (b+1)/2 \rfloor$ synů t
      k t_2 dej zbylých $\lceil (b+1)/2 \rceil$ synů t
      t_1 předchází t_2
    uprav ρ_o, S_o a H_o
    {implic.: uprav $\rho_{t_1}, \ldots, H_{t_2}$}
    {při štěpení kořene ještě musíme vytvořit nový kořen}
    $n := t_j$, kde s je syn t_j
  else
    $n := t$
  end if
  lock(n)
  unlock(o)
  $o := n$
  $t := s$
end while

if t nereprezentuje x **then**
  vrcholu o přidej nového syna t' reprezentujícího x
  zařaď t' na správné místo mezi jeho bratry a uprav ρ_o, S_o a H_o
end if
unlock(o)

8.3.2 Paralelní DELETE(x) z (a, b) stromu

$o :=$ lock(nadkořen) {Nadkořen je implementační pomůcka. Slouží k zamknutí přístupu k celému stromu a uchovává max(S)}
$t :=$ kořen
$h :=$ **nil** {Jakmile $h \neq$ **nil**, $x \in H_h$ a h bude zamčený do konce procesu.}
{Invariant mezi průchody cyklem: o je otec t, o je kromě h jediný vrchol zamknutý tímto procesem.}
while t není list **do**
  $i := 1$
  while $i < \rho_t \wedge H_t[i] < x$ **do**
    $i := i + 1$
  end while
  if $H_t[i] = x$ **then**
    $h := t$
  end if
  $s := S_t[i]$
  {preventivní spojení/přesun:}
  if $\rho(t) = a$ **then**
    $v :=$ bezprostřední bratr t
    if $\rho_v = a$ **then** {smíme spojit}
      {Spojení}
      sluč v a t do t {viz 4'}
      uprav ρ_o, S_o a H_o
      $t := o$
    else {$\rho_v > a$, spojení by mělo více než b synů}
      {Přesun}
      přesuň krajního syna v do t
      uprav H_o, H_v a H_t
    end if
  end if
  lock(t)
  if $o \neq h$ **then**
    unlock(o)
  end if
  $o := t$
  $t := s$
end while
if t reprezentuje x **then**
  odstraň t
  uprav H_o, H_h
  uprav S_o a ρ_o
  unlock(h)
end if
unlock(o)

8.4 Složitost posloupnosti operací na (a, b) stromu

A-sort funguje jednak proto, že v předtříděné posloupnosti rychle najde místo, kam se má vkládat, jednak proto, že se při samých INSERTech (*a díky správným a, b?*) provádí málo vyvažovacích kroků. V této sekci se podíváme na počet vyvažovacích kroků pro posloupnost operací INSERT a DELETE.

Nechť $b \geq 2a$.

Věta 8.4.1. *Mějme posloupnost n operací INSERT a DELETE aplikovanou na prázdný (a, b) strom. Označme P počet přesunů při provádění posloupnosti, SP počet spojení a ST počet štěpení. Dále označme P_h, SP_h a ST_h počet přesunů. spojení a štěpení, které nastanou ve výšce h (listy mají výšku 0).*

Nechť

$$c = \min\left(\min\left(2a-1, \left\lceil \frac{b+1}{2} \right\rceil\right) - a, \; b - \max\left(2a-1, \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor\right) \right) \tag{8.1}$$

Pak platí

$$P \leq n \tag{8.2}$$

$$(2c-1)ST + cSP \leq n + c + \frac{c}{a+c-1}(n-2) \tag{8.3}$$

$$P_h + SP_h + ST_h \leq \frac{2n^{c+2}}{(c+1)^h} \tag{8.4}$$

Platí $c \geq 1$ (při $b = 2a$ dokonce $c = 1$). Z toho

$$ST + SP \leq \frac{n}{c} + 1 + \frac{n-2}{a}, \tag{8.5}$$

tedy lineárně vzhledem k n.

Pro paralelní verze INSERT a DELETE platí obdobná věta, když $b \geq 2a + 2$.

Pro důkaz použijeme *bankovní paradigma*: datovou strukturu ohodnotíme podle toho, jak je "uklizená". Operace, které datovou strukturu "uklidí", zvětší její "zůstatek na účtě". Ty, které ji "naruší", zůstatek zmenší. Potom najdeme vztah mezi zůstatkem a spotřebovaným časem. *Tohle pokulhává. Myslel jsem si, že zůstatek je něco jako čas v konzervě, který si pomalé operace berou od rychlých …, ale v tomhle případě to asi funguje jinak.* vyjasnit

(a, b) stromy jsou uklizené, když mají vrcholy počet synů někde uprostřed mezi a a b. Tehdy nenastane v brzké době vyvažovací operace. V tomto smyslu definujme:

použiju z jako zůstatek místo b jako balance, protože souvislost s vyvažováním stromu je zde spíš matoucí

$$z(v) = \min(\rho_v - a, b - \rho_v, c) \qquad v \text{ je vnitřní vrchol různý od kořene} \tag{8.6}$$

$$z(\text{kořen}) = \min(\rho_v - 2, b - \rho_v, c) \tag{8.7}$$

Pro strom T definujme

$$z(T) = \sum_{v \in T} z(v)$$

$$z_h(T) = \sum_{\substack{v \in T \\ v \text{ má výšku } h}} z(v)$$

Platí

$$z(T) = \sum_h z_h(t)$$

Podobně jako u červenočerných stromů definujme parciální (a, b)-strom:

Definice 8.4.1. (T, v) je *parciální* (a, b)*-strom,* když v je vnitřní vrchol T různý od kořene a kromě v jsou splněny podmínky pro (a, b)-strom a $a - 1 \leq \rho_v \leq b + 1$.

Z definice zůstatku vyplývají tyto vlastnosti:

$$\rho_v = a - 1 \text{ nebo } b + 1 \implies z(v) = -1 \tag{8.8}$$
$$\rho_v = a \text{ nebo } b \implies z(v) = 0 \tag{8.9}$$
$$\rho_v = 2a - 1 \implies z(v) = c \tag{8.10}$$
$$\rho_u = \left\lfloor \frac{b+1}{2} \right\rfloor \wedge \rho_v = \left\lceil \frac{b+1}{2} \right\rceil \implies z(u) + z(v) \geq 2c - 1 \tag{8.11}$$
$$|\rho_u - \rho_v| \leq 1 \implies z(u) \geq z(v) - 1 \tag{8.12}$$

8.4.1 přidání/ubrání listu

Mějme (a, b)-strom T a přidáme nebo ubereme list, jehož otec je v. Pak vznikne parciální (a, b)-strom (T', v) a platí:

$$z_1(T') \geq z_1(T) - 1 \tag{8.13}$$
$$z_h(T') = z_h(T) \quad h > 1 \tag{8.14}$$
$$z(T') \geq z(T) - 1 \tag{8.15}$$

8.4.2 štěpení

Mějme parciální (a, b)-strom (T, v), kde v je ve výšce h. Nechť T' vznikl *štěpením* v. Pak $(T', \text{otec } v$ je parciální (a, b)-strom a platí:

$$z_h(T') \geq 2c + z_h(T) \qquad \text{z 8.8 a 8.11} \tag{8.16}$$
$$z_{h+1}(T') \geq z_{h+1}(T) - 1 \tag{8.17}$$
$$z_i(T') = z_i(T) \quad i \neq h, h+1 \tag{8.18}$$
$$z(T') \geq z(T) + 2c - 1 \tag{8.19}$$

8.4.3 spojení

Mějme parciální (a, b)-strom (T, v), kde $\rho_v = a - 1$ a v je ve výšce h, y je bezprostřední bratr v. Nechť $\rho_y = a$ a T' vznikl *spojením* v *a* y. Pak $(T', \text{otec } v$ je parciální (a, b)-strom a platí:

$$z_h(T') \geq c + 1 + z_h(T) \qquad \text{z 8.8, 8.9 a 8.10} \tag{8.20}$$
$$z_{h+1}(T') \geq z_{h+1}(T) - 1 \tag{8.21}$$
$$z_i(T') = z_i(T) \quad i \neq h, h+1 \tag{8.22}$$
$$z(T') \geq z(T) + c \tag{8.23}$$

8.4.4 přesun

Mějme parciální (a, b)-strom (T, v), kde $\rho_v = a - 1$ a v je ve výšce h, y je bezprostřední bratr v. Nechť $\rho_y > a$ a T' vznikl *přesunem syna od* y *k* v. Pak T' je (a, b)-strom a platí:

$$z_h(T') \geq z_h(T) \qquad \text{z 8.8, 8.9 a 8.12} \tag{8.24}$$
$$z_i(T') = z_i(T) \quad i \neq h \tag{8.25}$$
$$z(T') \geq z(T) \tag{8.26}$$

Nechť po skončení posloupnosti operací máme (a, b)-strom T_k. Sečteme předchozí výsledky:

$$z(T_k) \geq (2c - 1)ST + cSP - n \tag{8.27}$$

$$z_1(T_k) \geq 2cST_1 + (c+1)SP_1 - n \tag{8.28}$$
$$z_h(T_k) \geq 2cST_h + (c+1)SP_h - ST_{h-1} - SP_{h-1} \quad h > 1 \tag{8.29}$$

Vadí nám, že jsou ve výrazu i spojení a štěpení z jiné hladiny.
$c \geq 1 \implies 2c \geq c+1$.

$$z_h(T_k) \geq (c+1)(ST_h + SP_h) - ST_{h-1} - SP_{h-1}$$

$$ST_h + SP_h \leq \frac{z_h(T_k)}{c+1} + \frac{ST_{h-1} + SP_{h-1}}{c+1} \leq \frac{z_h(T_k)}{c+1} + \frac{z_{h-1}(T_k)}{(c+1)^2} + \frac{ST_{h-2} + SP_{h-2}}{(c+1)^2} \tag{8.30}$$
$$\leq \left(\sum_{i=0}^{h-1} \frac{z_{h-i}(T_k)}{(c+1)^{i+1}}\right) + \frac{ST_0 + SP_0}{(c+1)^h} \qquad j = h-i, \text{ rozšíříme } (c+1)^{h-i} \tag{8.31}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{h} \frac{z_j(T_k)(c+1)^j}{(c+1)^{h+1}}\right) + \frac{n}{(c+1)^h} \tag{8.32}$$

Nechť T je (a,b)-strom s m listy. Chceme shora odhadnout $z(T)$.

$$m_j = \text{počet vnitřních vrcholů různých od kořene} \begin{cases} \text{s právě } a+j \text{ syny} & \text{když } j \in \{0 \,..\, c-1\} \\ \text{s alespoň } a+j \text{ syny} & \text{když } j = c \end{cases} \tag{8.33}$$

Když v je vnitřní vrchol různý od kořene s právě $a+j$ syny, $j \in \{0 \,..\, c-1\}$, pak $z(v) \leq j$.
Když v je vnitřní vrchol různý od kořene s alespoň $a+c$ syny, pak $z(v) \leq c$.
Tedy

$$z(T) \leq c + \sum_{j=0}^{c} j m_j = * \tag{8.34}$$

Spočítáme hrany v T: nalevo jsou hrany vycházející z kořene a vnitřních vrcholů, napravo jsou hrany přicházející do vnitřních vrcholů a listů.

$$2 + \sum_{j=0}^{c} (a+j)m_j \leq \text{počet hran} = \left(\sum_{j=0}^{c} m_j\right) + m \tag{8.35}$$

Tedy $m - 2 \geq \sum_{j=0}^{c}(a+j-1)m_j$.

$$* = c + \sum_{j=0}^{c} \frac{j}{a+j-1}(a+j-1)m_j \leq c + \sum_{j=0}^{c} \frac{c}{a+c-1}(a+j-1)m_j \leq c + \frac{c}{a+c-1}(m-2) \tag{8.36}$$

Spojením tohoto výsledku s 8.27 dostaneme 8.3.
K důkazu 8.4 využijeme 8.32.

$$m_{h,j} = \text{počet vnitřních vrcholů ve výšce } h \begin{cases} \text{s právě } a+j \text{ syny} & \text{když } j \in \{0 \,..\, c-1\} \\ \text{s alespoň } a+j \text{ syny} & \text{když } j = c \end{cases} \tag{8.37}$$

$$z_h(T) \leq \sum_{j=0}^{c} j m_{h,j} \tag{8.38}$$

$$\sum_{j=0}^{c} m_{h,j} = \text{počet vrcholů ve výšce } h \geq \sum_{j=0}^{c} (a+j) m_{h+1,j} \tag{8.39}$$

$$\sum_{j=0}^{c} j m_{h,j} \leq \sum_{j=0}^{c} m_{i-1,j} - a \sum_{j=0}^{c} m_{i,j} \tag{8.40}$$

$$\sum_{i=1}^{h} z_i(T_k)(c+1)^i \leq \sum_{i=1}^{h} (c+1)^i \left(\sum_{j=0}^{c} j m_{i,j} \right) \tag{8.41}$$

označme $s_i = \sum_{j=0}^{c} m_{i,j}$

$$\overset{8.40}{\leq} \sum_{i=1}^{h} (c+1)^i \left(s_{i-1} - a s_i\right) \tag{8.42}$$

$$= (c+1)s_0 - (c+1)^h a s_h + \sum_{i=2}^{h} (c+1)^i \left(s_{i-1} - \frac{a}{c+1} s_{i-1} \right) \tag{8.43}$$

$$\leq (c+1)m \qquad \text{protože } \frac{a}{c+1} \geq 1 \text{ a } s_0 = m \tag{8.44}$$

$$ST_h + SP + h \leq \frac{m}{(c+1)^h} + \frac{n}{(c+1)^h} \leq \frac{2n}{(c+1)^h}$$

$$P_h \leq SP_{h-1} - SP_h \leq SP_{h-1} + ST_{h-1} \leq \frac{2n}{(c+1)^{h-1}}$$

Tím dostáváme 8.4:

$$ST_h + SP_h + P_h \leq \frac{2n(c+2)}{(c+1)^h}$$

8.5 Propojené (a, b) stromy s prstem

8.5.1 Algoritmus MEMBER

Kapitola 9

Samoopravující se struktury

Upravující algoritmy pracují na seznamech, mohou přemístit prvek, který je argumentem operace. (pokud zůstává v seznamu) Čas na vyhledání - to je pozice hledaného prvku. Pokud není v seznamu, je to délka seznamu + 1.

Pokud byl prvek na i-tém místě a přesune se na j-té, tak je-li
j < i , provedou i-j volných výměn
j > i , provedou j-i placených výměn

Volné výměny se nezapočítávají do složitosti. Pokud x není v seznamu při operaci INSERT(x), tak předpokládejme, že je na 1. pozici po ukončení seznamu.

9.1 Amortizovaná složitost

XXX

9.2 Seznamy

XXX

9.2.1 Algoritmus MEMBER

XXX

9.2.2 Algoritmus INSERT

XXX

9.2.3 Algoritmus DELETE

XXX

9.2.4 Algoritmus MFR (Move Front Rule)

Při operaci MEMBER(x) je x v seznamu nebo při operaci INSERT(x) bude x po skončení operace na 1. místě seznamu.

Věta 9.2.1. *Mějme posloupnost P operací MEMBER, INSERT a DELETE a mějme dva prosté seznamy S1, S2 množiny S.*
Pak pro každý upravující algoritmus A platí:
Když MFR provede P na seznam S1 a A provede P a seznam S2, tak platí:
a) čas MFR $\leq$ čas na vyhledání A + počet placených výměn A - počet volných výměn A - $|P|$ když

S1 = S2
b) čas MFR $\leq$ čas na vyhledání A + počet placených výměn A - počet volných výměn A - $|P|$ + $\binom{|S|}{2}$ když S1 $\neq$ S2

Definice 9.2.1. Nechť S1, S2 jsou dva prosté seznamy množiny S, pak bal(S1,S2) je počet neuspořádaných dvojic x,y, x $\neq$ y, x,y $\in$ S takových že x je před y v S1 a y je před x v S2.

Poznámka 9.2.1. Platí
bal(S1,S2) = 0 $\Leftrightarrow$ S1 = S2 (prvky jsou ve stejném pořadí $\Leftrightarrow$ seznamy jsou stejné)
bal(S1,S2) $\leq \binom{|S|}{2}$ (všechny dvojice jsou přeházené)

Důkaz věty XXX. Přes amortizovanou složitost A.
Předpokládejme, že A i MFR mají provést operaci O.
A ... provádí na seznam S_A, výsledek bude S'_A
MFR .. provádí O na seznam S_{MFR}, výsledek bude S'_{MFR}
amortizovaná složitost operace O bude čas MFER pro operaci O + bal(S'_A, S'_{MFR}) - bal(S_A, S_{MFR})
balance je def. vzhledem k algoritmu A.

Ukážeme, že amortizovaná složitost O pro MFR $\leq$ 2*čas na vyhledání A + počet placených výměn A - počet volných výměn A - 1

$$\mathrm{S_A} \overset{vyhledn}{\rightarrow} S''_A \overset{vmny}{\rightarrow} S'_A$$

$$\mathrm{S_{MFR}} \rightarrow S'_{MFR} \rightarrow S'_{MFR}$$

kde po operaci

DELETE(x)	$S''_A = S'_A$
MEMBER(x)	$S''_A = S_A$
INSERT(x)	x je v seznamu , $S''_A = S_A$
	x není v seznamu, S''_A vznikne z S'_A přidáním x za poslední prvek seznamu

Podstatné je, že seznamy jsou nad stejnou množinou

Amort. složitost první části $\leq$ 2*čas na vyhledání pro A - 1
Amort. složitost druhé části = počet placených výměn A - počet volných výměn A

(i) Předpokládejme, že x není v seznamu a délka seznamů je n. Čas MFR je n+1 , čas na vyhledání pro algoritmus je n+1 operace MEMBER(x) a DELETE(x) $S''_A = S'_{MFR}$ a tady amort. slož. MFR = čas operace = n++ $\leq$ 2(n+1) - 1
n+1 je čas na vyhledání pro A - 1
S''_A vznikne z S_A přidáním x za posl. prvek S_A
S'_{MFR} vznikne z S_{MFR} přidáním x na zač. seznamu tedy bal(S''_A, S'_{MFR}) - bal(S_A, S_{MFR}) = n
Amort. slož. operace MFR = n+1 + n=2n + 1=2(n+1) - 1 = 2*čas na vyhledání A - 1

(ii) x je v seznamu. Předpokládejme, že x je na i-tém místě v seznamu S_A na j-tém místě v seznamu S_{MFR} Čas operace pro MFR je j, čas na vyhledání pro A je i. Označme k počet y v seznamu takových, že y je v S_A za x, v S_{MFR} před x.

Pak i+k $\geq$ j (i+k $\geq$ i-k+j) amort. slož. pro MFR = j + bal(S''_A, S'_{MFR}) - bal(S_A, S_{MFR})

DELETE(x) bal(S''_A, S'_{MFR}) - bal(S_A, S_{MFR}) $\leq$ -k amort. slož. $\leq$ j - k $\leq$ 2i - 1 = 2*čas na vyhledání A - 1

MEMBER(x), INSERT(x) bal(S''_A, S'_{MFR}) - bal(S_A, S_{MFR}) $\leq$ -k + i-1 (nějaké dvojice mohly přibýt) amort. slož. operace MFR $\leq$ j-k+i-1 $\leq$ i+i-1 = 2i - 1 = 2*čas na vyhledání A-1

Amort. slož.
1. fáze operace $\leq$ 2*čas na vyhledání A-1 2. fáze operace = počet placených výměn A - počet volných výměn A Při placené výměně si v seznamu S''_A vymění x místo z za x, tedy dvojice x,z přibude při počítání bal(S'_A, S'_{MFR}) - bal(S''_A, S'_{MFR}) (v S_{MFR} je x první) Při volné výměně se v seznamu S''_A vymění x místo s prvkem u před x, tedy dvojice x,u se vynechá při počítání bal. Amort. slož. MFR $\leq$ 2*čas na vyhledání A + počet placených výměn A - počet volných výměn A - 1

Tedy platí:
čas posloupnosti P pro MFR $\leq$ odhad amort. složitosti + bal(S_1, S_2) = 2*čas na vyhledání v P algoritmem A + počet placených výměn A při P - počet volných výměn A při P - $|P|$ + bal(S_1, S_2)

když $S_1 = S_2$ pak bal(S_1, S_2)=0 a platí a) $S_1 \neq S_2$ pak bal(S_1, S_2) $\leq \binom{|S|}{2}$ a platí b) □

Poznámka 9.2.2. S tímto jsme se setkali při EISCH je to důvod, proč je EISCH lepší než LISCH VICH lepší než LICH

9.2.5 Algoritmus TR (Transposition Rule)

Když je x při operaci MEMBER(x) a INSERT(x) na i-tém místě, tak ho dá na (i-1)-ní místo, při INSERT(x), kdy x není v seznamu, dá x na předposl. místo.

Poznámka 9.2.3. Lze najít posloupnost příkazů P lib. délky, že MFR vyžaduje čas ($|P|$) a TR vyžaduje čas ($|P|^2$). Na druhou stranu očekávaný čas TR $\leq$ očekávaný čas MFR.

Chceme spočítat očekávaný čas pro posloupnosti P aplikované na seznam S, kde P obsahuje jen operace MEMBER(x) pro x $\in$ S.

Předppokládejme, že S=1,2, $\ldots$, n a β_1 = pravděpodobnost operace MEMBER(x) pro x $\in$ S. S = $\{1,2,3\}$ $\ldots$ stavy Markovova řetězce jsou všechny permutace S pravděpodobnost přechodu je pst. operace převádějící jeden stav do druhého

Tyto Markovovy řetězce jsou nerozložitelné a aperiodické a to znamená, že existují asymptot. pravděpodobnosti, tj. pro seznam Π je dána pravděpodobnost κ_Π, že po provedení náhodné posloupnosti P s daným rozložením operací skončíme u seznamu Π.

Pak očekávaný čas je $\sum_\Pi \kappa_\Pi \sum_i \beta_i \Pi(i)$, $\Pi(i)$ je pozice i v seznamu Π.
$p_1 = \sum_\Pi \kappa_\Pi \Pi(i) \ldots$ očekávaná pozice prvku i $\delta(j,i)$ = asmyptot. pst., že prvek j je před i, pak platí

$$\delta(j,i) = \sum\{\kappa_\Pi, \Pi \; seznam, \Pi(j) < \Pi(i)\}$$

pak

$$\begin{aligned} p_i = \sum_\Pi \kappa_\Pi \Pi(i) &= \sum_\Pi \kappa_\Pi (1 + |j, \Pi(j) < \Pi(i)| \\ &= 1 + \sum j, \Pi\{kappa_\Pi, \Pi(j) < \Pi(i)\} = 1 + \sum_j \delta(j,i)(1) \end{aligned} \tag{9.1}$$

Zkusíme $\delta(j,i)$ spočítat jiným způsobem:
Idea: jak se může stát, že ve výsledném seznamu je j před i ? V posloupnosti P existovala operace MEMBER(x) a po ní se už nevyskytovala operace MEMBER(i) ani MEMBER(j).

Jaká je pravděpodobnost tohoto jevu ?

$$\beta_j \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (\beta_i - \beta_j)]^k = \beta_j \frac{1}{1-(1-(\beta_i+\beta_j)} = \frac{\beta_j}{\beta_j+\beta_i} \overset{(1)}{=} 1 + \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} \frac{\beta_j}{\beta_j+\beta_i} \tag{9.2}$$

očekávaný čas operace je

$$\sum_i \beta_i p_i = \sum_{\substack{j,i \\ j \neq i}} \frac{\beta_i \beta_j}{\beta_i + \beta_j}$$

Předpokládejme, že $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$
pak nejrychlejší algoritmus na seznam $x_1 - x_2 - \ldots - x_n$ je klasický algoritmus bez přemísťování prvků. Očekávaný čas tohoto algoritmu je

$$\sum_{i=1}^{n} i\beta_i =$$

$$1 + \sum_{i,j=1} 2\frac{\beta_j\beta_i}{\beta_i+\beta_j} \leq 1 + \sum_{\substack{i,j\\ j<i}} 2\beta_i = 1 + \sum_{i=1}^{n} 2*(i-1)\beta_i = \frac{\beta_j}{\beta_j+\beta_i} \leq 1 =$$

$$1 + 2\cdot\sum_i i\beta_i - 2\sum_i \beta_i = 2\sum_{i=1}^{n} i\beta_i - 1 \quad (9.3)$$

9.3 Splay stromy

patová struktura - binární vyhledávací stromy s ohodnocenými prvky

9.3.1 Operace SPLAY

Základní operací je pr práci s těmito stromy je SPLAY(x), která zjistí, zda x je reprezentován v dané množině. Pokud x leží v množině, algoritmus ho přemístí do kořene.

Když x neleží v množině, pak algoritmus přemístí do kořene buď nejmenší prvek větší než x nebo největší prvek menší než x (který leží v reprez. množině)

9.3.2 Podporované operace

MEMBER, INSERT, DELETE, JOIN2(T_1,T_2), JOIN3(x, T_1, T_2) (nebo asi taky JOIN3(T_1, x, T_2)), SPLIT(x), CHANGEWEIGHT(x, $\triangle$).

JOIN2(T_1,T_2)
předpokládá, že $\forall$ prvky reprezentované $T_1 < \forall$ prvky reprezentované T_2
výsledný strom reprezentuje $T_1 \cup T_2$.

JOIN3(T_1, x, T_2) předpokládá, že $\forall$ prvky reprezentované $T_1 < x < \forall$ prvky reprezentované T_2
výsledný strom reprezentuje $T_1 \cup T_2 \cup x$.

SPLIT(x) výsledek: strom T_1 : $\forall prvky \in T_1 < x$
strom T_2: $\forall prvky \in T_2 > x$
+ informace, zda x ležel v reprezentované množině

CHANGEWEIGHT(x, $\triangle$) zjistí, zda x leží ve stromě a pokud ano, pak k jeho váze přičte $\triangle$.

9.3.3 Algoritmus MEMBER

Viz algoritmus 9.1

Algoritmus 9.1 MEMBER pro Splay stromy

```
SPLAY(x)
if x je reprezentován v kořeni then
  "x je v S"
else
  "x není v S"
end if
```

9.3.4 Algoritmus JOIN2

Viz algoritmus 9.2

Algoritmus 9.2 JOIN2(T_1,T_2)

SPLAY(T_2, ∞) // nejvetsi prvek
kořen T_1 bude levý syn kořene T_2

9.3.5 Algoritmus JOIN3

Viz algoritmus 9.3

jaké mají být argumenty Splay() ?

Algoritmus 9.3 JOIN3(T_1, x, T_2)

vytvoříme vrchol t reprezentující x
Splay()
kořen T_1 je levý syn t
kořen T_2 je pravý syn t

zde chybi obrazek

9.3.6 Algoritmus SPLIT

Viz algoritmus 9.4

Algoritmus 9.4 SPLIT(x)

SPLAY(x)
if kořen T reprezentuje x **then**
  T_1 podstrom levého syna kořene
  T_2 podstrom pravého syna kořene
  výstup T_1, T_2, x, $x \in S$
else
  if kořen T reprezentuje prvek < x **then**
    T_2 podstrom pravého syna kořene T
    $T_1 = T - T_2$
    T1 podstrom pravého syna kořene T
    $T_2 = T - T_1$
  end if
  výstup T_1, T_2, $x \in S$
end if

zde chybi obrazek

9.3.7 Algoritmus DELETE

Viz algoritmus 9.5

Algoritmus 9.5 DELETE(x)

SPLAY(x)
if x v kořeni **then**
  T_1 je podstrom levéjo syna kořene T
  T_2 je podstrom pravého syna kořene T
  T ← JOIN2(T_1, T_2)
end if

jiný zápis: $T_1, T_2 \leftarrow SPLIT(x, T)$ $T \leftarrow JOIN3(T_1, x, T_2)$

9.3.8 Algoritmus INSERT

Viz algoritmus 9.6

Algoritmus 9.6 INSERT(x)

SPLAY(x)
if x není v kořeni **then**
  if kořen stromu reprez. prvek < x **then**
    T_2 je podstrom pravého syna kořene
    T_1 = T - T_2
  else
    T1 je podstrom levého syna kořene
    T_2 = T - T_1
  end if
  JOIN3(T_1, x, T_2)
end if

jiný zápis: $T_1, T_2 \leftarrow SPLIT(x, T)$ $T \leftarrow JOIN3(T_1, x, T_2)$

9.3.9 Algoritmus CHANGEWEIGHT

Viz algoritmus 9.7

Algoritmus 9.7 CHANGEWEIGHT(x, △)

SPLAY(x)
if x je v kořeni **then**
  k váze x přičti △
end if

Předpokládejme, že W(x) je váha prvku a je to kladné celé číslo. tW(x) - totální váha x, je to součet vah všech prvků v podstromě určeném x

Př. chybí obrázek

tW(a) = W(a) + W(b) + W(c)

r(x) je rank(x) $r(x) = \lfloor logtW(x) \rfloor$

bal(konfigurace) = $\sum r(W), Wjeprvekkonfigurace$

Pro strom T je tW(x) = tW(kořene T) r(T) = r(kořen T)

Lemma 9.3.1. *Nechť T je binární vyhledávací strom, t t je vnitřní vrchol a u,v jsou synové t. Pak* $r(t) > minr(u), r(v)(r(list) = -\infty)$.

Důkaz. Předpokládejme, že $tW(u) \leq tW(v)$

$$r(t) = \lfloor logtW(t) \rfloor \geq \lfloor log2tW(u) \rfloor = 1 + \lfloor logtW(u) \rfloor = 1 + r(u)$$

□

9.3.10 Algoritmus SPLAY

Viz algoritmus 9.8 chybí obrázky

t se po skončení operace SPLAY(x) dostane do kořene

9.3.11 Amortizovaná složitost SPLAY

čas operace SPLAY = počet opakování cyklu, když vrchol t transportujeme do kořene

Lemma 9.3.2. *Amortizovný čas operace SPLAY(x,T)* $\leq 3(r(T) - r(t)) + 1$, *kde t je vrchol, který transportujeme do kořene. (když x je pvekem reprez. množiny, pak t reprezentuje x, jinak je to buď největší nebo nejmenší prevek menší (větší) než x)*

Algoritmus 9.8 CHANGEWEIGHT(x, △)

```
SPLAY(x)
t ← kořen
while t není list a t reprezentuje x do
  if x < t then
    t ← levý syn t
  else
    t ← pravý syn t
  end if
end while
if t je list then
  t ← otec(t)
end if
while t není kořen do
  if otec(t) je kořen then
    rotace(t, otec(t))
  else
    if otec(t) i t jsou leví synové (praví) then
      rotace(otec(t), děd(t))
      rotace(t, otec(t))
    else
      dvojitá rotace(t, otec(t), děd(t))
    end if
  end if
end while
```

Důkaz. rozdělíme podle akce, která se provádí ve while cyklu a) while cyklus provádí rotace chybí obrázek

Amortizovaná složitost tohoto kroku = tady je děsný zmatek

$$= asoperace + bal(novkonf.) - bal(pvodnkonf.) = 1 + r'(u) - r(v) \leq 1 + r(u) + r(v) \leq 1 + 3(r(u) - r(v)) \tag{9.4}$$

protože x má v původním i novém stromě stejné prvky nečitelné

$$r(u) \quad = \quad r'(t)r'(u) \quad \leq \quad r'() \quad = \quad r(u) \tag{9.5}$$

b) while cyklus provádí dvojitou rotaci

Amortizovaná složitost této operace = = čas operace + bal(nová konf.) - bal(původní konf.) = = 1 + r'(u) - r(v) - r(u) - r(t) (*)

pro $x \neq t, u, v$ platí $r(x) = r'(x)$ r(v) = r'(t)

b1)

$$r(v) > r(t), pakr'(u), r'(v) \leq r'(t) = r(v)r(u) \geq r(t), 1 \leq r(v) - r(t)(*) \leq r(v) - r(t) + 2r(u) - 2r(t) = 3(r(v) - r(t))$$

b2)

$$r(v) = r(t), pakpodlelemmatur'(t) > minr'(u), r'(v)pak2r'(t) \geq r'(u) + r'(v) + 1(*) \leq 2r(u) - 2(r(t) = 2(r(v) - r(t)) = (r(t) = 0)3(r(u) - 3r(t))$$

□

9.3.12 Amortizovaná složitost ostatních operací

XXX

Kapitola 10

Haldy

Definice 10.0.1. Haldy jsou stromové struktury, které splňují

- lokální podmínku na uspořádání - prvek reprezentující otce je menší než prvek reprezentovaný synem
- strukturální podmínku na stromy, ze kterých jsou vytvořené - podle nich se haldy rozdeluji na Fibonacciho, Leftist apod.

10.1 d-regulární haldy

Co musí být splněno:

1. každý vrchol s vyjímkou nejvýše jednoho je buď list nebo má d synů
2. každý vrchol má nejvýše d synů
3. existuje očíslování synů každého vrcholu tak, že po očíslování průchodem šířky platí: když vrchol nemá list, pak každý vrchol s menším číselm má d synů.

Definice 10.1.1. d-regulární halda, d celé číslo d$\geq$ 2
Je to strom T takový, že existuje jednoznačná korespondence mezi vrcholy stromů a prvky reprezentované množiny a platí:

1. když x je prvek přiřazený vrcholu t, pak otci(t) je přiřazen prvek $\leq$ x
2. strom T splňuje podmínky (i),(ii),(iii) pak po očísllování průchodem do šířky platí: když vrchol má číslo i, jeho synové mají čísla d(i-1)+2,d(i-1)+3,...,di+1 a otec má číslo $\lceil \frac{i-1}{d} \rceil$.

Př. 3-regulární halda

když takto očíslované prvky dáme do pole, pak platí: když je vrchol na i-tém místě, pak jeho synové jsou 3(i-1)+2, 3i, 3i+1 a otec je na $\lceil \frac{i-1}{3} \rceil$ místě v poli. to využijeme pro implementaci polem - ušetříme místo.

Poznámka 10.1.1. nejpopulárnější jsou 2-reg. haldy, protože synové i-tého vrhocholu jsou na místech $2(i-1)+2 = 2i, 2(i-1)+3 = 2i+1$, otec je na $\lceil \frac{i-1}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{i}{2} \rceil$. $\Rightarrow$ snadné počítání (bitový posun)

10.1.1 Algoritmus UP

UP(x) ... srovná haldu směrem nahoru

A: if prvek reprezentovaný x je < prvek reprezentovaný otcem(x) then x a otce(x) vyměníme a pokračujeme v A

10.1.2 Algoritmus DOWN

A: if prvek reprezentující x > prvek reprezentovaný některým synem x then vyměníme x a syna x, který reprezentuje nejmenší prvek, pokračujeme v A

Poznámka 10.1.2. když má hlada hloubku h, pak UP(x) vyžaduje čas O(h), DOWN(x) čas O(dh).

10.1.3 Operace na haldě

INSERT

přidáme poslední list t reprezentující x UP(t)

MIN

... prvek reprezentovaný v kořeni

DELETEMIN

prvek reprezentovaný posledním listem dáme do kořene, odstraníme posl,. list DONW(kořen)

DECREASEKEY(x)

musíme znát polohu vrcholu t reprezentujícího x, toto halda neumožňuje nalézt změníme uspořádání v bodě x UP(x) mohl by být menší než jeho otec, proto provedeme UP

INCREASEKEY

musíme znát polohu vrcholu t reprezentujícího x, toto halda neumožňuje nalézt změníme uspořádání v bodě x DOWN(x)

DELETE

Musíme znát polohu vrcholu t reprezentujícího x, toto halda neumožňuje nalézt
Vezmeme prvek y reprezentovaný posledním listem, odstraníme poslední list, prvek t, který reprezentoval x bude reprezentovat y

if y < x **then**
  UP(t) else DOWN(t)
end if

10.1.4 Algoritmus MAKEHEAP

Dána prostá posloupnost $x_1, x_2, ..., x_n$. Chceme vytvořit d-reg. haldu reprezentující množinu $x_1, x_2, ..., x_n$. Vezmeme "d-reg. strom" T s vrcholy přiřadíme prvky $x_1, x_2, ..., x_n$. Pro všechny vrcholy, které nejsou listy podle očíslování v pořadí od největšího k nejmenšímu provedeme DOWN(t).

Invariant: v okamžiku, kdy provádím DOWN(t), tak vrcholy, které reprezentující větší prvky splňují směrem dolů podmínku

10.1.5 Složitost operací

V d-reg. haldě reprezentující n-prvkovou množinu implementace operací vyžaduje časy dané tabulkou:

Operace	složitost
MIN	O(1)
INSERT, DECREASEKEY	$O(log_d(n))$
DELETEMIN, INCREASEKEY, DELETE	$O(d \cdot log_d(n))$

Máme vrchol v i-té hladině a "d-reg. strom" má hloubku h. Kolik času potřebuje DOWN(t) ? Je to O(d(h-1)) počet vrcholů v i-té hladině je di čas MAKEHEAP je $O(\sum i = 0h - 1d^i d(h-i)) = O(dS)$, kde

$$S = \sum i = 0h - 1d^i(h-i)$$

Budeme počítat

$$dS - S = \sum i = 0h - 1d^{i+1}(h-i) - \sum i = 0h - 1d^i(h-i) =$$

$$d^h - h + \sum i = 0h - 1d^i(h-i-(h-i-1)) = d^h - h\frac{d^h-1}{d-1}$$

$$\Rightarrow S = \frac{d^h-h}{d-1} + d\frac{d^{h-1}-1}{(d-1)^2},$$

$$h = log_d(n) \Rightarrow S \approx O(\frac{n}{d}) \quad (10.1)$$

10.1.6 Dijkstrův algoritmus

K čemu jsou d-reg. haldy dobré ? např. pro implementaci Dijkstrova algoritmu.

Vstup: orientovaný graf (V,E), fce c:E-¿R+, vrchol z
Výstup: d(v), $v \in V$
d(v) je délka nejkratší cesty ze z do v
Alg: $d(z) = 0, d(v) = \infty \forall v \in V, v \neq z, U = z$

while $U \neq \emptyset$ **do**
  vezmeme z U prvek $u \in U$ s nejmenší hodnotou d(u),
  odstraníme ho z U.
  for $\forall (u,v) \in E$ **do**
    if $d(v) > d(u) + c(u,v)$ **then**
      $d(v) = d(u) + c(u,v)$, v přidáme do U
    end if
  end for
end while

U reprezentujeme pomocí d-reg. haldy. Pak čas Dijkstrova algoritmu je O($|V|\cdot$ čas na INSERT + $|V|\cdot$ čas na DELETEMIN + $|E|\cdot$ čas na DESCREASEKEY)

když d = 2, pak to je $O(|E|log_2(|V|))$ $d = max\frac{|E|}{|V|}, 2$, vyjde čas $O(|E|log_d(|V|))$
když $\exists \epsilon$, že $|E| \geq c|V|^{1+\epsilon}$ pro nějaké cc, pak čas je $O(|E|)$. (graf je dostatečně hustý)
$|E| \geq c|V|log^{\epsilon}|V|$ pro nějaké c, ϵ, pak čas $O(|E|loglog|V|)$.

Další aplikace: třídění

HEAPSORT
Vstup: prostá posloupnost prvků $x_1, x_2, ..., x_n$.
Výstup: uspořádaná psl. pvrků $x_1, x_2, ..., x_n$.
Alg: MAKEHEAP($x_1, x_2, ..., x_n$)
  i = 1
  while $HEAP \neq \emptyset$ **do**
    x_1 = MIN(HEAP)
    DELETEMIN(HEAP)
    i = i + 1

end while

Poznámka 10.1.3. Optimum pro d-reg. haldy je někde mezi d=6 a d=7.

10.2 Leftist haldy

Definice 10.2.1. LEFTIST strom
Mějme binární strom a pro každého syna máme určeno, zda je levý nebo pravý. Pro vrchol v definujeme npl(v) jako délku nejkratší cesty z v do vrcholu v podstromu v s nejvýše jedním synem. Binární strom je LEFTIST, když
a když v má jednoho syna, pak je to levý syn b kdž v má dva syny, pak npl(levého syna) $\geq$ npl(pravého syna)

Definice 10.2.2. Cesta $x_1, x_2, ..., x_n$ se nazývá pravá, když x_i je pravý syn x_{i-1} pro i=2,3,…,n a x_n nemá pravého syna.

Vlastnosti:

1. každý podstrom leftist stromu je leftist
2. délka pravé cesty z $\forall$ vrcholu v je $\leq$ log(počet vrcholů v podstromu vrcholu v)

Definice 10.2.3. Letist halda reprezentující množinu S je leftist strom T s n vrcholy takový, že exzistuje jednoznačná korespondence mez prvlky S a vrcholy T taková, že $\forall$ v prvek přiřazený vrcholu v $\geq$ prvek přiřayený otci v.

Definice 10.2.4. MERGE(T_1,T_2)
podmínka: T_1,T_2 reprezentují disjunktní množiny S_1, S_2. Výsledek: halda reprezentující $S_1 \cup S_2$.

Poznámka 10.2.1. podobné operaci JOIN v AVL stromech (ale…)

MERGE(T_1, T_2)
if $T_1 = 0$ **then**
  MERGE(T_1, T_2) $\rightarrow T_2$ konec
end if
if $T_2 = 0$ **then**
  MERGE(T_1, T_2) $\rightarrow T_1$ konec
end if
if kořen T_2 reprezentuje prvek < prvek repr. kořenem T_1 **then**
  vyměníme T_1 a T_2
end if
pravý syn kořene $T_1 \rightarrow$ MERGE(T_2, podstrom pravého syna kořene T_1)
if npl(levého syna kořene T_1) < npl(pravého syna kořene T_1) **then**
  prohodím syny kořene T_1
end if
npl(kořene T_1) = npl(pravého syna kořene T_1) + 1
MERGE(T_1, T_2) $\rightarrow T_1$

Poznámka 10.2.2. Časová složitost operace MERGE v leftist haldách je $O(log(n_1 + n_2))$, kde n_1, n_2 jsou velikosti reprezentovaných množin.

INSERT(x)
vytvoříme novou haldu T_1 reprezentující pouze prvek x
T $\rightarrow$ MERGE(T_1, T_2)
DELETEMIN
$T_1 \rightarrow$ podstrom levého syna kořene T
$T_2 \rightarrow$ podstrom pravého syna kořene T

T → MERGE(T_1, T_2)

Věta 10.2.1. *Operace MIN v leftist haldách vyžaduje čas O(1), operace MERGE, INSERT, a DELETEMIN vyžadují čas O(log n), kde n je počet prvků ve výsledné haldě.*

Poznámka 10.2.3. koukneme se jak vypadá výsledný strom a podíváme se na vrcholy, se kterými jsme něco museli provádět - tyto vrcholy leží na pravé cestě, tj. je jich omezený počet.

DECREASEKEY(x)
odtrhneme podstrom T_1 vrcholu x, y → otec(x)
$T_2 = T - T_1$
zmenšíme ohodnocení kořene stromu T_1
if y má jen pravého syna **then**
  změmíme tohoto syna na levého, npl(y) = 0
end if
y → otec(y)
while npl(y) > minnpl(levý syn y), npl(pravý syn y) + 1 **do**
  if npl(levého syna y) ¡ npl(pravého syna y) **then**
    prohodíme syny y
  end if
  npl(y) = npl(pravého syna y) + 1, y → otec(y)
end while
T → MERGE(T_1, T_2)

Poznámka 10.2.4. npl, které jsem musel přepisovat je vždycky pravý syn

Věta 10.2.2. *Operace DECREASEKEY, INCREASEKEY a DELETE vyžadují čas O(log n) v leftist haldách (a počet prvků výsledné reprez. množiny)*

10.3 Binomiální haldy

jsou založeny na binomiálním rozvoji čísel, jsou definovány na speciálních stromech.

Vlastnosti stromů H_i

- H_i má 2^i vrcholů
- hloubka H_i je i
- kořen H_i má i synů
- $\forall j < i$ existuje syn kořene H_i takový, že jeho podstrom je izomorfní s H_j.

Důkaz. Důkaz: indukcí přes i (elementární) □

Definice 10.3.1. Binomická halda je soubor stromů takových, že

každý strom je izomorfní s nějakým H_i

žádné dva stromy nejsou izomorfní

existuje jednoznačná korespondence mezi vrcholy reprezentované množiny a vrcholy stromů taková, že prvek odpovídající otci je menší než prvek odpovídající vrcholu.

10.3.1 Operace

MERGE(T_1, T_2)
(T_1, T_2 binom. haldy velikosti n_1, n_2)
P = 0, i = 0, T = 0
while i *leq* $\log(n_1 + n_2)$ **do**

S_1 je strom v T_1 izomorfní s H_i (pokud neexistuje, tak $S_1 = 0$)
S_1 je strom v T_1 izomorfní s H_i (pokud neexistuje, tak $S_1 = 0$)
if S_1, S_2, P = 0 **then**
  neprovedeme nic
end if
if jeden strom z S_1, S_2, P je neprázdný **then**
  vložím tento strom do T, P=0
end if
if dva stromy z S_1, S_2, P jsou neprázdné **then**
  spojím tyto stromy a výsledek vzložím do P
end if
if všechny stromy z S_1, S_2, P jsou neprázdné **then**
  vložím do T, spojení S_1, S_2 vložím do P
end if
i = i + 1
end while

Poznámka 10.3.1. P odpovídá přenosu v binárním sčítání, T je výsledná halda

Spojeni(S_1, S_2)
S_1, S_2 jsou stromy izomorfní s H_i pro nějaké i
if prvek reprezentovaný kořenem $S_1 \leq$ prvek reprezentovaný kořenem S_2 **then**
  kořen S_2 se stane dalšík synem kořene S_1
else
  kořen S_1 se stane dalšík synem kořene S_2
end if

INSERT - stejný jako v leftist haldách MIN - prohledáme prvky reprezentované kořeny stromů a najdeme nejmenší

DELETEMIN

prohledáním prvků reprezentovaných kořeny stromů naleznu strom S, jehož kořen reprezentuje nejmenší prvek
$T_1 = T\ S, T_2$ je tvořen podstormy všechn synů kořene S
(tj. utrhnu kořen a zbytek dám do haldy) - je to halda díky vlastnosti 4
T $\rightarrow$ MERGE(T_1, T_2)

Poznámka 10.3.2. operace DELETE se nedá rozumně provést,museli bychom přebudovat celý strom

Věta 10.3.1. *Operace MERGE, INSERT, MIN, DELETEMIN a DECREASEKEY vyžadují čas O(log n). Operace INCREASEKEY vyžaduje čas $O(log^2 n)$.*

Poznámka 10.3.3. sčítání v binárních číslech O(1) 1 0 0 … 0 1 1 1 … 1 amort. slož. neplatí něco podobného pro binom. stomy ? Ano, pro operaci INSERT.

Věta 10.3.2. *Amortizovaná složitost operace INSERT je O(1).*

Poznámka 10.3.4. MERGE zabírá dost času - musíme ho dělat ?

10.3.2 Líná implementace binom. hald

změníme definici - vynecháme podmínku 2, tj. teď v naší binom. haldě mohou být izomorfní stromy.

Operace MERGE(T_1, T_2) - provedeme konkatenaci seznamů $T_1 a T_2$. Jenom to by nefungovalo, musíme ještě změnit operace MIN, DELETEMIN.

MIN

při prohledávání prvků reprezentovaných kořeny stromů seřadíme stromy do množin Q_i, i=0,…,n , kde Q_i je množina všech stromů v T izomorfních s H_i.

i = 0, T = 0
while $\exists Q_i \neq 0$ **do**
  while $|Q_i| > 1$ **do**
    vezmeme dva stromy z Q_i, spojíme je, výsledek dáme do Q_{i+1}
  end while
  if $Q_i \neq 0$ **then**
    strom z Q_i dám do T
  end if
  i = i + 1
end while

DELETEMIN dá stromy po odtržení nejmenšího prvku do odpovídajících množin Q_i

Věta 10.3.3. *Operace MERGE a INSERT při líné implementaci vyžadují čas O(1), operace DELETEMIN a MIn vyžadují čas O(počet stromů).*

bal(konfigurace) = počet všech stromů ve všech haldách v konfiguraci
Amort. slož. MERGE O(1) INSERT O(1) MIN O(log n) DELETEMIN O(log n)
amort. slož. = čas pro operaci + bal(výsledné konfigurace) - bal(původní konfigurace)

10.3.3 Zobecněné binomiální haldy

XXX

přednášelo se to tento rok vůbec ?

10.4 Fibonacciho haldy

XXX dopsat !

Kapitola 11

Dynamizace

V uspořádaném poli umíme rychle vyhledávat, ale přidat prvky znamená celé ho přebudovat. Ve strůstajícím hašování zase nešly prvky mazat, ve velmi komrimovaných trie ani přidávat, ani mazat. V této kapitole ukážeme obecnou metodu, jak tyto problémy řešit, podobnou přístupu u binomiálních hald.

11.1 Zobecněný vyhledávací problém

Definice 11.1.1. *Vyhledávací problém* je funkce $f : U_1 \times 2^{U_2} \to U_3$, kde U_1, U_2 a U_3 jsou univerza.

Definice 11.1.2. *Řešení vyhledávacího problému* pro $x \in U_1, A \subseteq U_2$ je nalezení hodnoty $f(x, A)$.

Poznámka 11.1.1. Chceme najít strukturu, která reprezentuje A a algoritmus, který pro vstup $x \in U_1$ spočítá $f(x, A)$. Takové struktuře se říká statická struktura pro vyhledávací problém.

Př.:

Klasický vyhledávací problém: $U_1 = U_2 = U$, univerzum prvků; $U_3 = \{0, 1\}, A \subseteq U_2$

$$f(x, A) = \begin{cases} 0 & \text{když } x \notin A \\ 1 & \text{když } x \in A \end{cases} \text{(rozložitelný)}$$

Euklidovská vzdálenost bodů v rovině: $U_1 = U_2 =$ euklidovská rovina; $U_3 = \mathbb{R}^+$; $f(x, A) = dist(x, A$ vzdálenost bodu $x \in U_1$ od množiny A. (rozložitelný, $\oplus \ldots$ operace min)

Nalezení předchůdce $U_1 = U_2 = U_3$ pro $x \in U_1$ a $A \subseteq U_!$ a je $f(x, U_!)$ je největší prvek $A \leq x$ (rozložitelný, je potřeba disjunkce)

Příslušnost ke konvexnímu obalu $U_1 = U_2 =$ rovina; $U_3 = \{0, 1\}$;

$$f(x, A) = \begin{cases} 0 & \text{když } x \text{ nepatří do konvexního obalu } A \\ 1 & \text{když } x \text{ patří do konvexního obalu } A \end{cases} \text{(není rozložitelný problém)}$$

chybí obrázek

11.1.1 Operace INSERT a DELETE

Pro množinu $A \subseteq U_2$ a pro statickou strukturu S řešící vyhledávací problémf pro $x \in U_2$. INSERT(x,A) - vybudování struktury řešící vyhledávací problém pro monožinu $A \cup \{x\}$. DELETE(x,A) - vytvoření struktury řešící vyhl. problém pro množinu $A - \{x\}$.

Pozn: ze statické struktury chce vytovořit dynamickou (dynamizace).INSERT je obvykle jednodušší než DELETE, na tu budeme potřeboivat dodatečné předpoklady.

Nároky na dynamizaci - chceme aby se f(x,A) v nové struktuře spočítalo přibližně stejně rychle jako v původní struktuře - když vytvoření původní struktury pro n prvnkovou množinu trvalo t, pak operace INSERT by přibližně měla vyžadovat čas t t/n.

Definice 11.1.3. Vyhledávací problém je *rozložitelný*, když existuje operace $\oplus$ spočitatelná v konstantním čase a platí: když $x \in U_1$ a A a B jsou disjunktní podmnožiny U_2, pak

$$f(x, A \cup B) = f(x, A) \oplus f(x, B).$$

Poznámka 11.1.2. Z výše uvedených příkladů není rozložitelným problémem příslušnost ke konvexnímu obalu, ostatní vyhledávací problémy jsou rozložitelné.

Definice 11.1.4. Nechť f je rozložitelný vyhledávací problém a $\mathcal{S}$ je "statická" datová struktura, která ho řeší. Neboli $\mathcal{S}$ je tvořena pro pevnou množinu $A \subseteq U_2$ a obsahuje operaci, která pro vstup x počítá $f(x, A)$.

Popíšeme důležité parametry $\mathcal{S}$: nechť $n = |A|$, označme

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{S}}(n) &= \text{čas potřebný pro výpočet } f(x, A) \\ S_{\mathcal{S}}(n) &= \text{paměť potřebná pro vybudování } \mathcal{S} \\ P_{\mathcal{S}}(n) &= \text{čas potřebný pro vybudování } \mathcal{S} \end{aligned}$$

Budeme předpokládat, že $Q_{\mathcal{S}}(n)$, $S_{\mathcal{S}}(n)/n$ a $P_{\mathcal{S}}(n)/n$ jsou neklesající funkce.

Máme množinu A a vytvoříme pro ni novou strukturu D. Nechť $A_i \subseteq A$ taková, že buď $|A_i| = 2^i$ nebo $A_i = \emptyset$

$A_i \cap A_j = \emptyset proi \neq j$. $\bigcup A_i = A$

Platí $A_i \neq \emptyset$ právě když (i+1)-ní bit v dvojkovém rozvoji čísla —A— je 1.

Chceme navrhnout strukturu, která by uměla

1. Pro $x \in U_1$ a pevné $A \subseteq U_2$ rychle spočítat $f(x, A)$.
2. Pro A a $y \in U_2$ rychle vytvořit strukturu pro $A \cup \{y\}$.

Mějme $A_0, A_1, \cdots$ takové, že

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$
2. buď $A_i = \emptyset$ nebo $|A_i| = 2^i$
3. $\bigcup_i A_i = A$

Nová struktura $\mathcal{D}$ reprezentující A je potom

- nějaká dynamická struktura reprezentující A (např. (a,b)-strom, červeno-černý strom, AVL-strom)
- Pro každé $A_i \neq \emptyset$ máme S strukturu reprezentující A_i.
- Pro každé $A_i \neq \emptyset$ seznam prvků v A_i; prvky těchto seznamů jsou projpojeny s odpovídajícími prvky ve stromě.

Jak v nové struktuře spočítáme f(x,A) ? pro každou $A_i \neq \emptyset$ spočítáme $f(x, A_i)$ a pomocí operace $\oplus$ pak spočítáme f(x,A).

Poznámka 11.1.3. platí, když $A_i \neq \emptyset$, pak $i \leq \lceil log_2 |A| \rceil$ čas, který je potřeba v nové struktuře na výpočet f(x,A)

$$log_2|A| + \sum_{i=0}^{log|A|} Q(2^i) \leq log|A| + \sum_{i=0}^{log|A|} Q(|A|) = log|A|(Q(|A|) + 1) \quad (11.1)$$

$log_2(|A|)$ - vyhodnocení $f(x, A)$ z $f(x, A_i), i = 0, 1, ...$

tedy algoritmus potřebuje O(log—A— Q(—A—)) času když $Q(n) = \Theta(n^{\epsilon}) pro \epsilon > 0$, pak platí. že nová struktura pro výpočet f potřebuje

$$log|A| + \sum_{i=0}^{logn} Q(2^i) =$$

$$|A| + \sum_{i=0}^{log|A|} \frac{S(2^i)}{2^i} 2^i \leq |A| + \sum_{i=0}^{log|A|} \frac{S(|A|)}{|A|} 2^i$$

$$= |A| - \frac{S(|A|)}{|A|} 2^i = |A| - \frac{S(|A|)}{|A|} (\sum_{i=0}^{log|A|} 2^i)$$

$$= O(S(|A|)) \quad (11.2)$$

INSERT(x)
if $x \notin A$ **then**
nalezneme nejmenší j, že $A_j = \emptyset$
end if
$A_j = \{x\} \cup \bigcup i < j A_i, A_i = \emptyset pro i < j$
vytvoříme strukturu S spojový seznam pro A_j
x přidáme do reprezentace A.

Kdy se buduje znovu S struktura pro A_j ?

1. musí se naplnit všechny A_i pro i¡j to je 2^{j-1} úspěšných INSERTů (ty, které přidaly prvek)
2. provede se úspěšný INSERT, který vyprázdní A_i pro $i \leq j$
3. znovu se musí naplnit A_i tj. $2^{j-1} - 1$ úspěšných INSERTů
4. daší úspešný INSERT vytvoří teprve S strukturu pro A_j

tj. $2 \cdot 2^j$ úspěšných INSERTů

11.1.2 Amortizovaný čas operace INSERT

$$log|A| + \sum_{i=0}^{log|A|} \frac{P(2^j)}{2^{j+1}} \leq log|A| + \sum_{i=0}^{log|A|} \frac{P|A|}{|A|} = O(log|A| \cdot \frac{P|A|}{|A|})$$

Poznámka 11.1.4. pokud $\frac{P(n)}{n} = \Theta(n^{\epsilon}) pro \epsilon > 0$, pak amortizovaný čas pro operaci INSERT bude $O(\frac{P|A|}{|A|})$.

Věta 11.1.1. *Máme rozložitelný vyhled. problém f a máme pro něj statickou strukturu, která ho řeší v čase $Q(n)$, vyžaduje $S(n)$ paměti a vytvoří se v čase $P(n)$, $kde Q(n), \frac{P(n)}{n}, \frac{S(n)}{n}$ jsou neklesající funkce. Pak jsme navrhli novou semidynamickou dat. strukturu D, řešící f v čase $O(Q(n)log(n))$ vyžadující $O(S(n))$ paměti a umožňující INSERt s amort. složitostí $O(\frac{P(n)}{n} \cdot log(n))$.*

Máme množinu A
budeme mít roklad A na disjunktní množiny $A_{i,j}, i = 0, 1, ..., j \in 0, 1, ..., k_j$, kde $k_j \in 0, 1, 2$.
$|A_{i,j}| = 2^i$ a platí:
když $A_{i,0}$ existuje pro $i > 0$, pak existují $A_{i-1,0}, A_{i-1,1}$.

Struktura:

1. reprezentace A (pomocí (a,b)-stromů, červeno-černých stromů, …)
2. $\forall$ existující $A_{i,j}$ je S struktura reprezentující $A_{i,j}$
3. $\forall$ existující $A_{i,j}$ je spojový seznam reprezentující $A_{i,j}$

4. když $A_{i,0}$ a $A_{i,1}$ existují pro nějaké i, pak je "rozpracovaná" S struktura pro množinu $A_{i-1,k_i+1} = Ai,0 \cup A_{i,1}$. tj. bylo provedeno několik kroků pro její vytvoření, ale není dokončena.

$A \subseteq U_2, i_0 \in N$
$\forall i = 0,1,...,i_0$ je dáno $j_i \in 0,1,2$ takové, že $j_i > 0$ když $i < i_0$.
$\forall i = 0,1,...,i_0$ a $\forall j = 0,1,...,j_i$ je $A_{i,j} \in A$ taková, že $|A_{i,j}| < 2^i$.

Definice 11.1.5. $A_{i,j}, i = 0,1,...,i_0, j = 1,2,...,j_i$ je rozklad A.

Pro každé $A_{i,j}$ je dána S struktura reprezentující $A_{i,j}$ a spojový seznam prvků z $A_{i,j}$, navíc dána dat. struktura reprezentující A. Když $A_{i,1}$ existuje, pak je rozpracovaná S struktura pro $A_{i+1,j_{i+1}+1} = A_{1,0} \cup A_{i,1}$.

pozn. struktura je rozpracovaná, jestliže bylo provedeno několikj kroků pro postaverní S struktury, ale ještě není dokončena.

- toto je definice nové semidynamické struktury

11.1.3 Paměťové nároky

$$\underbrace{|A|} + \sum_{i=0}^{log|A|} 4S(2^i) = |A| + \sum_{i=0}^{log|A|} \frac{S(2^i)}{2^i} 2^i \leq |A| + 4 \sum_{i=0}^{log|A|} \frac{S(|A|)}{|A|} 2^i =$$
$$|A| + \frac{4S(|A|)}{|A|}(\sum 2^i) = |A| + 4S(|A|) = O(S(|A|)) \quad (11.3)$$

11.1.4 Algoritmus pro výpočet

spočítáme $f(x, A_{i,j})$ pro každou $A_{i,j}$ a pomocí operace $\oplus$ spočítáme f(x,A).

čas potřebný pro výpočet A

$$\sum_{i=0}^{log|A|} 3Q(2^i) + 3log(|A|) \leq 3 \sum_{i=0}^{log|A|} Q(|A|) + 3log|A| = 3Q(|A|)log(|A|) = O(Q(|A|)log(|A|)) \quad (11.4)$$

Platí: $Q(n) \geq n^\epsilon$ pro nějaké ϵ, pak čas potřebný pro výpočet f je $O(Q(N))$.

INSERT(x)

když $x \notin A$ jinak provedeme:
vytvoříme S strukturu pro $A_{0,j_i+1} = \{x\}$ (zvětšíme j_0 o 1)
if j_o je liché **then**
  pak provedeme 1.krok pro vytvoření S struktury
  pro množinu $A_{1,j_1+\lceil\frac{j_0}{2}\rceil} = A_{0,j_0-1} \cup A_{0,j_0}$
end if
pro $i = 1,2,...,i_0+1$ v roustoucím pořadí:
if S je rozpracovaná struktura pro A_{i,j_i+1} **then**
  provedeme dalších $\frac{P(2^i)}{2^i}$ kroků pro její vybudování
end if
když jsme dobudovali S strukturu pro A_{i,j_i+1}, zvětšíme j_i o 1
zrušíme $A_{i-1,0} \cup A_{i-1,1}$, zmenšíme j_i o 2 a $A_{i-1,j}$ přepíšeme na A_{i-1,j_i+2}.
if j_i liché **then**
  provedeme 1.krok pro vytvoření Q struktury pro
  množinu $A_{1,j_i+1+\lceil\frac{j_i}{2}} = A_{i,j_i} \cup A_{i,j_i-1}$.
end if

11.1.5 Čas pro INSERT(x)

$$\underbrace{log|A|}\, asprozjitnzdax \in A + \sum_{i=0}^{log|A|} (\frac{P(2^i)}{2^i} + 1) = 2log|A| + \sum_{i=0}^{log|A|} \frac{2P(|A|)}{|A|} =$$

$$2log|A| + \frac{2P(|A|)}{|A|} \sum_{i=0}^{log|A|} 1 = 2log|A| \frac{2P(|A|)}{|A|} log|A| = O(\frac{2P(|A|)}{|A|} log|A|) \quad (11.5)$$

když $\frac{P(n)}{n} \geq n^\epsilon$ pro $\epsilon > 0$, pak INSERT vyžaduje čas $O(\frac{P(n)}{n})$.
Př.:

INSERT(x_1) $A_{0,0} = \{x_1\}$	INSERT(x_2) $A_{0,0} = \{x_1\}$ $A_{0,1} = \{x_2\}$ 1. krok pro $A_{1,0} = \{x_1, x_2\}$	INSERT(x_3) $A_{0,0} = \{x_1\}$ $A_{0,1} = \{x_2\}$ $A_{0,2} = \{x_3\}$ $\frac{P(2)}{2}$ kroků pro $A_{1,0} = \{x_1, x_2\}$
INSERT(x_4) $A_{0,0} = \{x_1\}$ $A_{0,1} = \{x_2\}$ $A_{0,2} = \{x_3\} \to A_{0,0} = \{x_3\}$ $A_{0,3} = \{x_4\} \to A_{0,1} = \{x_4\}$ dokončíme $A_{1,0} = \{x_1, x_2\}$ 1. krok pro $A_{1,1} = \{x_3, x_4\}$	INSERT(x_5) $A_{0,0} = \{x_3\}$ $A_{0,1} = \{x_4\}$ $A_{0,2} = \{x_5\}$ $A_{1,0} = \{x_1, x_2\}$ $\frac{P(2)}{2}$ kroků pro $A_{1,1} = \{x_3, x_4\}$	INSERT(x_6) $A_{0,0} = \{x_3\}$ $A_{0,1} = \{x_4\}$ $A_{0,2} = \{x_5\} \to A_{0,0} = \{x_5\}$ $A_{0,3} = \{x_6\} \to A_{0,1} = \{x_6\}$ $A_{1,0} = \{x_1, x_2\}$ dokončeno $A_{1,1} = \{x_3, x_4\}$ 1. krok pro $A_{1,2} = \{x_5, x_6\}$ 1. krok pro $A_{2,0} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $\frac{P(4)}{4}$ kroků

Věta 11.1.2. *Nechť S je statická struktura pro rozložitelný vyhledávací problém f a nechť K je "hladká" funkce. Pak existuje semidynamická struktura D založená na rozkladu určeném funkcí K, tak že platí: když K=O(log(n)), pak čas pro vyhledání je O(K Q(n)) pro INSERT je* $O(K(n) n^{\frac{1}{K(n)}} \frac{P(n)}{n})$ *když* $K = \Omega(log(n))$ *pak platí: čas pro vyhledání je* $O(K(n))Q(n))$ *pro INSERT je* $O(\frac{log(n)}{log \frac{K(n)}{log(n)}} \frac{P(n)}{n})$.

11.1.6 Dynamizace

Potřebujeme, aby struktura S připouštěla falešný DELETE (prvek pouze škrtneme, ale zůstane tam. falešný - čas. ani paměťové nároky se nezlepší ani nezhorší)

Definice 11.1.6. falešný DELETE je operace, která vyškrtne prvek z množiny - tj. umožní počítat $f(x, A - \{a\})$ (kde a je vyškrtnutý prvek) tak, že časové nároky budou stejné jako když nebyl žádný prvek vyškrtnut.

Budeme předpokládat, že čas pro falešný DELETE je O(n), kde n je velikost původní reprezentované množiny.

11.1.7 Reprezentace množiny A

rozložíme A na disjunktní množiny $A_j, j = 0, 1, ..., log|A| + 3$ takové, že buď $A_j = \emptyset$ nebo $2^{j-3} < |A_j| \leq 2^j$.

každá množina A_j bude reprezentována strukturou, která původně (když nebyly vyškrtnuté žádné prvky) měla velikost $\leq 2^j$.

Dále $\forall A_j \neq \emptyset$ bude dán spojový seznam prvků v A_j.

Bude dána datová reprezentace množiny A. Pro každý prvek a v spojovém seznamu množiny A_j bude dán ukazatel na prvek a v dat. struktuře reprezentující A a naopak. Pro každý prvek v dat. struktuře repr. A je dán ukazatel na prvek a v odpovídajícím spojovém seznamu.

11.1.8 Paměťové nároky

$$|A| + \sum_{i=0}^{log|A|+3} S(2^i) = |A| + \sum \frac{S(2^i)}{2^i} 2^i \le |A| + \sum_{i=0}^{log|A|+3} \frac{S(8|A|)}{8|A|} 2^i =$$
$$|A| + \frac{S(8|A|)}{8|A|} 2^i = |A| + \frac{S(8|A|)}{8|A|} \sum 2^i = |A| + S(8|A|) = O(S(8|A|)) \quad (11.6)$$

závěr: když S je omezená polynomem, pak paměťové nároky jsou O(S(n)). pokud S je superpolynomiální, pak paměť. nároky jsou O(S(8n)) (a platí S(n) = o(S(8n)))

výpočet f:
spočítáme $f(x, A_j)$ a pomocí operace $\oplus$ spočítáme f(x,A).

11.1.9 čas pro výpočet f

$log(n) + \sum_{i=0}^{log|A|+3} Q(2^i) = log(n) + \sum Q(8|A|) = O(Q(8|A|)log|A|)$.
závěr: čas na výpočet f je když Q je subpolynomiální $O(Q(n)log(n))$ polynomiální $O(Q(n))$ superplynomiální $O(Q(8n))$

INSERT(x)

if $x \notin A$ **then**
  nalezneme nejmenší j takové, že $|\bigcup i \le jA_i| < 2^j$
  položíme $A_j = \bigcup i \le jA_i \cup \{x\}$
  $A_i = \emptyset proi < j$
  vytvoříme S-strukturu a spojový seznam pro A_j (x přidáme do struktury reprezentující A a přidáme požadované ukazatele)
end if

Pozorování:
Když vytváříme při INSERTu S-strukturu pro A_j, pak $2^{j-1} < |A_j| \le 2^j$.
(když toto neplatí, pak pro j-1 je splněna nerovnost $|\bigcup i < j - 1A_i| < 2^{j-1}$ a to je spor s minimalitou j.

DELETE(x)

if $x \notin A$ **then**
  odstraníme x ze struktury pro A
  nalezneme j takové, že $x \in A_j$ (budeme znát přímo místo x v seznamu pro A_j)
  if $|A_j| = 1$ **then**
    smažeme A_j (odpovídající S-strukturu a spojový seznam) $\to A_j = \emptyset$
  end if
  if $|A_j| > 1$ a zároveň $|A_j| > 2^{j-3} + 1$ **then**
    na S strukturu pro A_j provedeme falešný DELETE9x0, x smažeme ze spojového seznamu pro $A_j \to A_j = A_j - \{x\}$
  end if
  if $|A_j| > 1$ a zároveň $|A_j| = 2^{j-3} + 1$ **then**
    if $A_{j-1} = \emptyset$ **then**
      $A_{j-1} = A_{j-1} - \{x\}, A_j = \emptyset$
      vybudujeme novou S-strukturu pro A_{j-1} (x odstraníme ze spojového seznamu pro $A_{j-1} - 1$)
    end if
    if $A_{j-1} = \emptyset$ a zároveň $|A_{j-1}| > 2^{j-2}$ **then**
      vyměním $A_j a A_{j-1}$
      z A_{j-1} odstraníme x a vytvoříme novou S-strukturu pro A_{j-1} (původní struktura mohla mít až 2^j prvků)
    end if
    if $A_{j-1} = \emptyset$ a zároveň $|A_{j-1}| \le 2^{j-2}$ **then**

tady nevím jestli nemá být jenom A_{j-1}

$B = (A_j \cup A_{j-1}) - \{x\}$
zrušíme S-struktury pro A_j, A_{j-1} a vybudujeme S-strukturu a spojový seznam pro B
if $|B| \geq 2^{j-2}$ **then**
$A_j = B, A_{j-1} = \emptyset$
else
$A_{j-1} = B, A_j = \emptyset$
end if
end if
end if
end if

Pozorování:
Když operace DELETE buduje S-strukturu pro množinu A_j, pak platí: $2^{j-1} \leq |A_j| \leq 2^{j-1}$.

11.1.10 Amortizovaný čas operace DELETE

$$(log|A| + D(2^j) + \frac{P(2^j)}{2^{j-3}}) = O(log|A| + D(|A|) + 8\frac{P(|A|)}{|A|})$$

$log|A|$ - zjištění zda $x \in A$
$D(2^j)$ - falešný DELETE
$\frac{P(2^j)}{2^{j-3}}$ - budování S-struktury - aspoň 2^{j-3} … před tím

zbytek poslední přednášky chybí

Kapitola 12

Vícedimenzionální vyhledávání

XXX vykládalo se to vůbec ?