KOMBINATORIKA A GRAFY I.

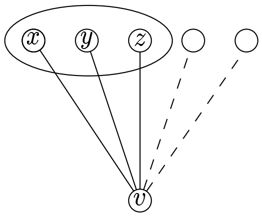
Tomáš Valla

13. června 2003

1. Úvod do Ramseyovy teorie

Hříčka. *Ve společnosti šesti lidí se vždy vyskytují 3 lidé, kteří se navzájem znají, nebo 3 lidé, kteří se navzájem neznají.*

Důkaz. Společnost si namodelujeme jako graf a zvolíme libovolný vrchol v grafu, z něj potom vedou alespoň 3 hrany nebo 3 nehrany. Ať jsou to nejprve hrany a ať tedy vedou do vrcholů x, y, z.



Pokud mezi těmito třemi vrcholy existuje byť jen jediná hrana, nalezli jsme trojúhelník. A pokud mezi nimi žádná hrana není, máme z nich nezávislou množinu. Když u v uvažujeme nehrany, je postup shodný. □

Od hříčky přejdeme k plnohodnotnému tvrzení.

Věta (Ramseyova pro grafy). *Pro každé přirozené n existuje přirozené číslo N tak, že libovolný graf na N vrcholech obsahuje úplný podgraf na n vrcholech nebo nezávislou množinu n vrcholů.*

Trochu obecněji: Pro každé přirozené n a r existuje přirozené číslo N tak, že je-li každá hrana grafu K_N obarvena některou z r barev, potom existuje jednobarevný podgraf K_n, tedy podgraf s hranami stejné barvy.

Důkaz. Nejprve dokážeme větu pro dvoubarevné grafy ($r = 2$) a až z ní odvodíme větu pro libovolný počet barev.

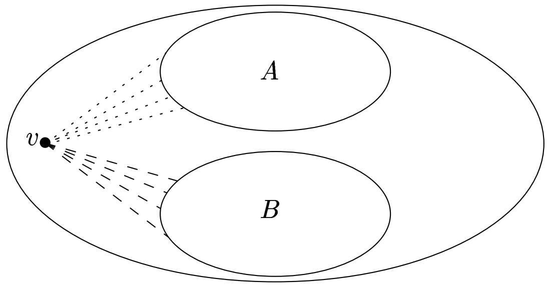
Definujeme si číslo $R(k, \ell)$ takto:

$$R(k,\ell) := \min \left\{ N;\ \begin{matrix} \text{každý } K_N \text{ s hranami obarvenými červeně a modře} \\ \text{obsahuje červený } K_k \text{ nebo modrý } K_\ell \end{matrix} \right\}$$

Stačí nám dokázat, že $R(n, n) < \infty$, ale ve skutečnosti ukážeme, že dokonce $R(k, \ell)$ je konečné pro každé k, ℓ. Půjdeme na to indukcí podle $k + \ell$.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

V případě $k = 1$ nebo $\ell = 1$ stačí vybrat jeden libovolný vrchol a máme $R(1, \ell) = 1$, $R(k, 1) = 1$. V druhém kroku indukce zvolíme pro $R(k, \ell)$ graf, který bude mít $R(k-1, \ell) + R(k, \ell - 1) + 1$ vrcholů (tedy dvě z indukce hotové velikosti a jeden vrchol navíc, říkejme mu v) a ukážeme, že v něm bude existovat červený K_k nebo modrý K_ℓ.



Z v potom vedou červené hrany do množiny A o alespoň $R(k-1, \ell)$ vrcholech *nebo* modré hrany do množiny B o alespoň $R(k, \ell - 1)$ vrcholech. Připomeňme si, že $R(k, \ell) = R(\ell, k)$, definice je symetrická.

(a) Uvažujme množinu A (připojenou červeně). Když A obsahuje červený K_{k-1}, připojíme k němu vrchol v a máme červený K_k, v opačném případě existuje už hotový modrý K_ℓ.
(b) Uvažujme množinu B (připojenou modře). Když B obsahuje modrý $K_{\ell-1}$, připojíme k němu vrchol v a dostaneme modrý K_ℓ, v opačném případě existuje už hotový červený K_k.

Všechny možnosti tedy vedou k existenci K_k nebo K_ℓ, $R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell - 1) + 1$ (jinými slovy, pro $R(k, \ell)$ mi stačí tolik vrcholů) a z indukce víme, že je tedy $R(k, \ell)$ konečné pro každé k, ℓ.

Číslu $R(k, \ell)$ se říká *Ramseyovo číslo* (pro grafy o dvou barvách) a důkaz nám pro něj dává odhad $\binom{k+\ell-2}{k-1}$.

Mají-li hrany grafu tři barvy, červenou, modrou a žlutou, spojíme nejdříve barvy modrou a žlutou do jediné, zelené, a na výsledný graf aplikujeme větu pro dvě barvy. Věta nám vrátí potřebnou velikost grafu N. Číslo N pro modro-žlutý graf teď použijeme jako číslo n pro červeno-zelený. Takže si zadefinujeme číslo $R(n) := R(n, n)$ a jako finální velikost tedy vezmeme $R(R(n))$. To postačí pro existenci i červeného nebo zeleného podgrafu.

Pro čtyři barvy převedeme stejným postupem problém na větu pro tři barvy, a tak dále, pro libovolný konečný počet barev tedy věta platí. □

Poznámka. Lze také nahlédnout, že pro libovolný konečný počet barev uspěje stejná konstrukce, jakou jsme použili pro dvě barvy. Zadefinujeme si číslo R pro více barev a v indukci stavíme graf z více částí.

Větu si ještě dále zobecníme, namísto hran grafu (tedy dvojic vrcholů) budeme mít obarvené obecně p-tice prvků.

Ramseyova věta pro systémy p-tic. *Pro všechna n, r, p přirozená čísla existuje přirozené N tak, že kdykoli X je N-prvková množina a každá p-prvková podmnožina X je obarvena některou z barev $1, 2, \ldots, r$, existuje n-prvková $Y \subset X$ tak, že všechny p-prvkové podmnožiny Y mají stejnou barvu.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle p, pro $p = 1$ jde o Dirichletův princip (prvků lze vždy vzít dost na to, aby zaplnily barevné přihrádky), pro $p = 2$ je to Ramseyova věta pro grafy (dvojice prvků jsou hrany grafu).

Na chvíli si mysleme, že velikost N množiny X už známe a p-tice na ní jsou obarvené dvěma barvami. Položíme $X_0 := X$ a uděláme tento krok pro $i = 1, \dots, 2n-1$:

- Zvolíme libovolný prvek $x_i \in X_{i-1}$ a obarvíme každou $(p-1)$-prvkovou podmnožinu S množiny $X_{i-1} \setminus \{x_i\}$ takovou barvou, jakou měla p-tice $S \cup \{x_i\}$. Podle indukčního předpokladu existuje dostatečně velká podmnožina X_i množiny $X_{i-1} \setminus \{x_i\}$, v níž všechny $(p-1)$-tice mají stejnou barvu b_i.

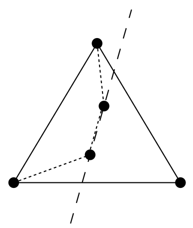
Některá z barev se objeví (z přihrádkového principu) jako b_i alespoň n-krát, dejme tomu červená. Potom $\{x_i;\ b_i = \text{červená}\}$ je hledanou n-prvkovou množinou Y.

Pro $r > 2$ barev se důkaz o mnoho neztíží, budeme pouze provádět více kroků, pro $i = 1, 2, \dots, rn-1$. Velikost N množiny X tedy lze zvolit dostatečně obrovskou (ale stále ještě konečnou) tak, aby množina X postačila na všechny kroky. $\square$

Použití Ramseyovy věty pro p-tice si ukážeme v následujícím tvrzení.

Věta (Erdős–Szekeres). *Pro každé k existuje N tak, že libovolná N-prvková množina bodů v rovině v obecné poloze (žádné 3 body neleží na přímce) obsahuje množinu vrcholů konvexního k-úhelníku.*

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle k. Pro $k = 4$ je $N = 5$. Sestrojíme si konvexní obal oněch pěti bodů, což může být buďto pětiúhelník nebo čtyřúhelník (v tom případě je to v pořádku) anebo to může být trojúhelník. V tom případě však vždy můžeme sestrojit čtyřprvkovou konvexní množinu vynecháním jednoho vrcholu trojúhelníku, například tak, že přímka spojující dva vnitřní body vždy odřízne jeden vrchol trojúhelníku.



V libovolné $k > 4$ prvkové množině bodů si obarvíme každou čtveřici takto: červeně, je-li její konvexní obal čtyřprvkový, nebo modře, je-li její konvexní obal tříprvkový (neboli netvoří konvexní množinu).

červeně modře

Ramseyova věta s $p = 4$, $r = 2$ a $n = k$ říká, že existuje N-bodová množina X a její k-bodová podmnožina Y taková, že všechny čtveřice na ní mají tutéž barvu. Protože už na pěti bodech existuje nějaká červená čtveřice (případ $k = 4$), všechny čtveřice na Y budou červené, nebude s v ní vyskytovat ani jedna nekonvexní čtveřice, takže celá Y je konvexní. $\square$

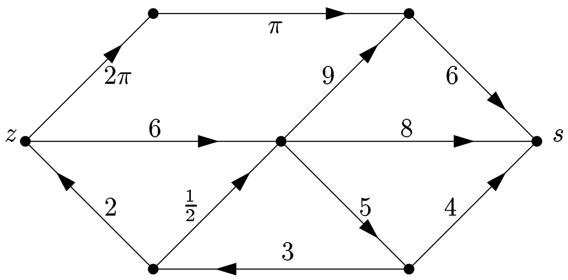
Poznámka. Větu je také možné dokázat metodami kombinatorické geometrie, odhad nutné velikosti množiny je jejich použitím daleko nižší, nicméně důkaz pomocí Ramseyovy věty je podstatně jednodušší.

2. Toky v sítích

2.1 Definice a fomulace hlavní věty.

Definice. *Síť* nazveme čtveřici (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, z a s dva různé vrcholy grafu G (říkáme jim *zdroj* a *stok*) a *kapacita* $c\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany nezápornými reálnými čísly.

Síť může vypadat třeba takto:



Síť si tedy můžeme představovat jako soustavu jednosměrných vodovodních trubek, kde každá má předepsanou maximální propustnost, a dvě význačná místa – zdroj a stok. Ve zdroji pouštíme vodu dovnitř a ve stoku nám voda vytéká ven. Tok je potom rozvržení, jak skutečně v našich trubkách voda proudí. Trubkou nesmí téci více, než je její kapacita, a vodovod „není děravý“ – to, co vteče do určitého vrcholu sítě (s výjimkou zdroje a stoku), zase vyteče ven. (Druhá podmínka je také známá pod názvem *Kirchhoffovy zákony*.) Velikostí toku se rozumí množství vody, které přebývá ve stoku, nebo ekvivalentně kolik vody je třeba posílat do zdroje.

Definice. *Tok v síti* je každá funkce $f\colon E \to \mathbb{R}_0^+$ splňující

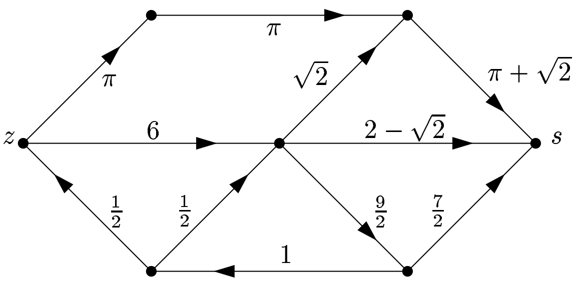
(1) Pro každou hranu $e \in E$ je $0 \leq f(e) \leq c(e)$.
(2) Pro každý vrchol $u \in V$ mimo zdroj a stok platí

$$\sum_{(x,u)\in E} f(x,u) = \sum_{(u,y)\in E} f(u,y).$$

Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z) = \sum_{(x,s)\in E} f(x,s) - \sum_{(s,x)\in E} f(s,x).$$

V našem příkladu tedy může existovat následujíci tok:



Budeme zkoumat, jaký maximální tok může danou sítí procházet. Naším předchozím příkladem prochází tok velikosti $\pi + \frac{11}{2}$, který však zřejmě maximální není. Začneme následujícím:

Tvrzení. *Pro každou síť existuje maximální tok.*

Toto tvrzení není vůbec samozřejmé. Toků je nekonečně mnoho a jejich velikosti jsou obecně reálná čísla, a tedy je třeba opatrnost (například interval $I = (0, 1)$ na reálné ose nemá maximum). Důkaz tvrzení používá metody matematické analýzy a pro nás je spíše postranním tématem, takže ho odložíme až na konec kapitoly. Pro celočíselné a racionální kapacity navíc dostaneme existenci maximálního toku jednodušším způsobem, taktéž uvedeným ke konci kapitoly.

Teď zavedeme další důležitý pojem: řez.

Definice. *Řezem mezi z a s* v síti $G = (V, E, z, s, c)$ nazveme množinu hran $R \subseteq E$ takovou, že v síti $G' = (V, E \setminus R, z, s, c)$ neexistuje žádná orientovaná cesta ze zdroje do stoku.

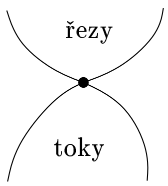
Kapacita řezu je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

V této sekci budeme pro krátkost říkat řezu mezi z a s prostě řez.[1]

Narozdíl od toků je řezů konečně mnoho (nejvýš tolik jako všech podmnožin množiny E), a tudíž zjevně existuje řez minimální kapacity. Nyní vyslovíme nejdůležitější výsledek o tocích.

HLAVNÍ VĚTA O TOCÍCH. *Pro každou síť se velikost maximálního toku rovná kapacitě minimálního řezu:*

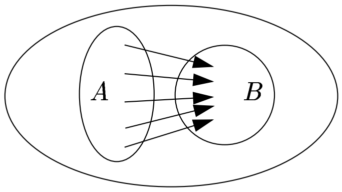
$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R)$$



2.2 Důkaz hlavní věty.

Začneme podrobnějším studiem řezů. Zavedeme si konvenci pro značení množiny separačních hran, které vedou z části sítě A do části B:

[1]Pojem *řez* má ve skutečnosti mnohem širší význam, zde však nebude hrozit nebezpečí zmatení.

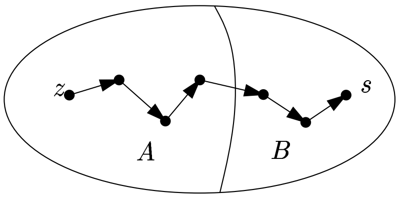


$$S(A,B) = \{(x,y);\ x \in A,\ y \in B,\ (x,y) \in E\}$$

Pro kapacitu a velikost toku na ní analogicky $c(A,B) = c(S(A,B))$ a $f(A,B) = f(S(A,B)) = \sum_{e \in S(A,B)} f(e)$.

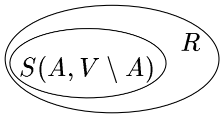
Je dobré si uvědomit následující více či méně viditelné vlastnosti řezů.

Vlastnost 1. *Rozdělíme-li síť na dvě disjunktní podmnožiny vrcholů A a B tak, že $z \in A$ a $s \in B$, potom množina $S(A,B)$ je řez (říkáme mu elementární řez).*



Důkaz. Kdyby existovala orientovaná cesta ze zdroje do stoku, museli bychom na ní někde narazit na rozhraní množin A a B. Taková hrana však podle definice patří do $S(A,B)$, množina $S(A,B)$ tedy tvoří řez. $\square$

Vlastnost 2. *Každý řez obsahuje elementární řez.*



Důkaz. Vezmeme množinu A vrcholů, do kterých vede v říznuté síti orientovaná cesta ze zdroje. Řez R potom obsahuje elementární řez $S(A, V \setminus A)$, protože kdyby hrana $e = (u,v)$ z $S(A, V \setminus A)$ nepatřila do řezu R (tedy $u \in A$, ale $v \notin A$), existovala by orientovaná cesta $z, \ldots, u, v$ v říznuté síti, takže by byl $v \in A$. $\square$

Vlastnost 3. *Každý minimální řez R je elementární; minimální zde znamená, že $R \setminus \{e\}$ není řez pro žádnou hranu $e \in E$.*

Důkaz. Vezmeme množinu A vrcholů, do kterých vede v říznuté síti orientovaná cesta ze zdroje. Z předchozího víme, že elementární řez $S(A, V \setminus A)$ je obsažen v R. Jenže z R nelze odebrat žádnou hranu, tedy $R = S(A, V \setminus A)$. $\square$

Lemma. *Pro každou $A \subseteq V$ obsahující zdroj a ne stok a pro libovolný tok f platí $w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A)$, speciálně tedy $w(f) = \sum_x f(s,x) - \sum_x f(x,s)$.*

Důkaz. Pro každý vrchol u z A mimo zdroje platí Kirchhoffův zákon

$$\sum_{(u,x) \in E} f(u,x) - \sum_{(x,u) \in E} f(x,u) = 0,$$

pro zdroj pak

$$\sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z) = w(f).$$

Sečteme dohromady do jediné rovnice levé strany a pravé strany předchozích rovnic, a po úpravě dostaneme

$$\sum_{\substack{u\in A\\ v\notin A}} f(u,v) - \sum_{\substack{u\notin A\\ v\in A}} f(u,v) = w(f),$$

což je přesně $f(A, V\setminus A) - f(V\setminus A, A) = w(f)$. □

Když si dáme dohromady zjištěná fakta, dostaneme následující nerovnost mezi maximálním tokem a minimálním řezem, jež je snadnější částí hlavní věty. Z trubkové analogie se sice zdá být zřejmou, nicméně chceme-li ji dokázat poctivě, dá to nějakou práci.

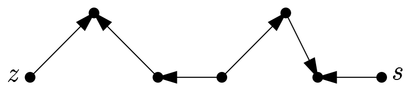
Důsledek. *Pro každý tok f a každý řez R je $w(f) \le c(R)$. Tudíž maximální tok je nejvýš roven minimálnímu řezu.*

Důkaz. V daném řezu R je obsažen nějaký elementární řez $S(A, V\setminus A)$ takový, že $z\in A$. Pro velikost toku f potom platí

$$w(f) = f(A, V\setminus A) - f(V\setminus A, A) \le f(A, V\setminus A) \le c(A, V\setminus A).$$

V řezu R jsou oproti elementárnímu řezu $S(A, V\setminus A)$ nějaké hrany dokonce navíc, takže máme $c(A, V\setminus A) \le c(R)$. □

Teď zavedeme klíčový pojem nasycené cesty. Dosud jsme mluvili o *orientovaných* cestách (a také jsme to pečlivě zdůrazňovali). Po zbytek této kapitoly budeme *cestou* rozumět posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{m-1}, e_m, v_m)$, kde $v_0, \dots, v_m$ jsou navzájem různé vrcholy uvažované sítě, a pro každé i je $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ nebo $e_i = (v_i, v_{i-1})$. Ignorujeme tedy orientaci hran, a například cesta ze zdroje do stoku (o takových budeme nyní hlavně hovořit) může vypadat třeba takto:



Definice. Cesta v právě uvedeném smyslu se nazývá *nasycená* (vzhledem k danému toku f), pokud pro nějakou hranu $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ orientovanou po směru je $f(e) = c(e)$ nebo pro nějakou hranu $e_i = (u_i, u_{i-1})$ orientovanou proti je $f(e) = 0$. Cestě, která není nasycená, budeme říkat *nenasycená.*

Tok nazveme nasycený, když každá cesta ze zdroje do stoku je nasycená.

Nasycená cesta je tedy taková, po níž teče největší možný tok.

Nyní si ukážeme důležité vlastnosti maximálního toku.

Tvrzení. *Tok f je maximální, právě když je nasycený. Pro každý maximální tok f existuje řez R tak, že $w(f) = c(R)$.*

Důkaz. Nejdřív sporem dokážeme, že maximální tok je nasycený. Nechť je f maximální a přesto nenasycený. Potom existuje nenasycená cesta P ze zdroje do stoku. Nyní najdeme možné vylepšení toku ve směru ze zdroje do stoku

$$\varepsilon_1 = \min\{c(e) - f(e);\ e\in P \text{ orientovaná po směru}\}$$

a vylepšení proti směru

$$\varepsilon_2 = \min\{f(e);\ e \in P \text{ orientovaná proti směru}\}$$

a vezmeme menší z nich: $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Cesta P je nenasycená, proto $\varepsilon_{1,2} > 0$, a tím spíše $\varepsilon > 0$. Stávající tok změníme na

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \varepsilon & e \in P \text{ orientovaná ve směru ze zdroje do stoku} \\ f(e) - \varepsilon & e \in P \text{ orientovaná proti směru} \\ f(e) & e \notin P. \end{cases}$$

Díky volbě ε se nepřekročí kapacity hran, a protože v rámci jednoho vrcholu z cesty P se číslo ε přičte i odečte, zůstanou v platnosti i Kirchhoffovy zákony. Máme teď nový tok a zároveň $w(f') = \sum f'(z,x) - \sum f'(x,z) = w(f) + \varepsilon$, tedy dokonce lepší tok než f. Tok f nebyl maximální, což je spor.

Nyní dokážeme, že je-li tok f nasycený, pak je maximální. Zvolíme množinu A takových vrcholů v, že existuje nenasycená cesta ze zdroje do v. Bude tedy $z \in A$, ale $s \notin A$ (tok je nasycený). Pro každou hranu e z $S(A, V \setminus A)$ je $f(e) = c(e)$ a druhým směrem pro hranu e z $S(V \setminus A, A)$ je $f(e) = 0$.

Velikost toku bude

$$w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) = c(A, V \setminus A) - 0 = c(A, V \setminus A).$$

Víme, že vždy $w(f) \leq c(R)$ pro každý tok f i řez R, a my jsme zde dokonce nyní našli takový řez R, že $w(f) = c(R)$. Tok f tedy určitě bude největší možný. Zároveň jsme zkonstruovali řez R, pro který platí vlastnost $w(f) = c(R)$. □

Pozorný čtenář si možná všiml, že už jsme dokázali celou hlavní větu o tocích: Víme, že pro danou síť existuje maximální tok f, a podle druhé části právě dokázaného tvrzení k němu existuje řez o kapacitě $w(f)$, a ten je nutně minimální.

2.3 Fordův–Fulkersonův algoritmus.

Důkaz hlavní věty o tocích dává jednoduchý algoritmus na hledání maximálního toku.

Algoritmus (Ford, Fulkerson).

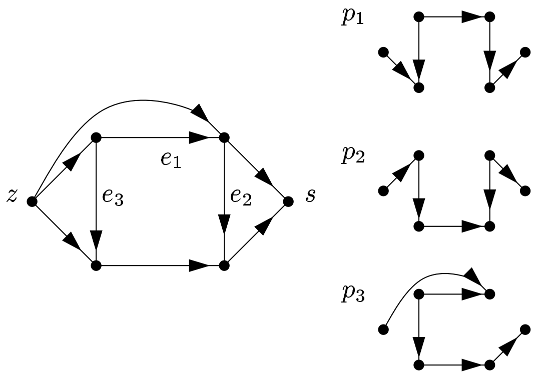
(1) Polož $f(e) = 0$ pro všechny hrany e.
(2) Pokud existuje nenasycená cesta P ze zdroje do stoku, najdi ε, vylepši cestu P a opakuj tento bod tak dlouho, dokud nějaká nenasycená cesta existuje.
(3) Stávající f je maximálním tokem.

Pozorování. *Jsou-li všechny kapacity v síti racionální čísla, je Fordův–Fulkersonův algoritmus konečný. Pro síť s racionálními kapacitami tedy dokazuje existenci maximálního toku.*

Důkaz. Po případném vynásobení všech kapacit jejich společným jmenovatelem můžeme předpokládat, že kapacity jsou dokonce celočíselné. Potom ε v algoritmu bude vždy alespoň 1, a velikost toku se tudíž zvýší v jednom kroku alespoň o 1. Algoritmus proto nutně skončí, a tedy najde nasycený tok, jenž je i maximální. □

Bohužel existuje iracionálně ohodnocená síť, na které Fordův–Fulkersonův algoritmus nedoběhne, a dokonce ani nebude konvergovat ke správnému výsledku.

Protipříklad. Pánové Ford s Fulkersonem si všimli, že na jistém druhu sítě lze simulovat výpočet členů posloupnosti $\{a_n\}$ definované $a_0 = 1$, $a_1 = r$ a $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$, kde $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Potom ovšem $r^2 = 1 - r$, přenásobením obou stran rovnice číslem r dostaneme $r^{n+2} = r^n - r^{n+1}$, platí tedy $a_n = r^n$. Vezmeme následující síť a cesty p_1, p_2 a p_3:



Kapacity nastavíme takto: $c(e_1) = a_0 = 1$, $c(e_2) = a_1 = r$, $c(e_3) = 1$ a ostatním hranám přiřadíme nějakou dostatečně velkou kapacitu M. Maximální tok v naší síti je zřejmě $2M$.

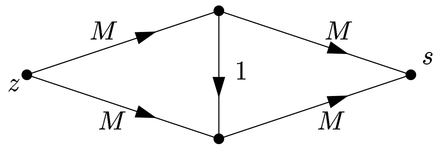
Začneme s nulovým tokem a budeme opakovaně používat posloupnost zlepšujících cest p_1, p_2, p_1, p_3. Jak se v průběhu každé iterace mění residuální kapacity (tj. to, co chybí k plnému nasycení hrany) hran e_1, e_2, e_3:

$$(a_n, a_{n+1}, 0) \to (a_{n+2}, 0, a_{n+1}) \to (a_{n+2}, a_{n+1}, 0) \to$$

$$\to (0, a_{n+3}, a_{n+2}) \to (a_{n+2}, a_{n+3}, 0)$$

V každé iteraci se tak tok zvětší o $2a_n + 2a_{n+1}$, vylepšování toku se nezastaví a jeho velikost navíc bude konvergovat k hodnotě $1 + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n = 3$.

Protipříklad. Ani v celočíselných sítích Fordův-Fulkersonův algoritmus nepoběží příliš rychle, pokud v následující síti (kde za M zvolíme nějaké hodně velké číslo) bude střídavě vylepšovat obě cesty délky tři, tak potom poběží v čase úměrném M.



Existují samozřejmě mnohem rafinovanější algoritmy, konečné a rychlejší, ty však nepatří do tohoto textu. Poznamenejme jen, že pokud v každém kroku Fordova–Fulkersonova algoritmu použijeme *nejkratší* možnou nenasycenou cestu ze zdroje do stoku, skončí algoritmus pro libovolné reálné kapacity, a dokonce v počtu kroků, omezeném polynomiální funkcí počtu hran sítě.

Pozorování. *Když jsou kapacity celočíselné, resp. racionální, je i maximální tok vypočtený Fordovým–Fulkersonovým algoritmem celočíselný, resp. racionální.*

Důkaz. Algoritmus v průběhu své činnosti čísla pouze sčítá, takže ve výsledném toku nemohou vzniknout jiná čísla než celá. Pro racionální kapacity lze (stejně jako výše) udělat podobnou úvahu, nebo převést na předchozí případ vynásobením vhodným jmenovatelem. □

Tato vlastnost maximálního toku se výborně hodí pro nejrůznější aplikace existenčního charakteru, jako například hledání párování v bipartitních grafech, a podobně.

2.4 Toky v sítích a lineární programování.
S toky v sítích se dá zacházet také z pohledu lineární algebry. *Cirkulace* v orientovaném grafu $G = (V, E)$ je libovolná funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ splňující v každém vrcholu Kirchhoffův zákon:

$$\sum_{(x,v)\in E} f(x,v) - \sum_{(v,x)\in E} f(v,x).$$

Tuto podmínku můžeme stručně zapsat jako $D_G f = 0$. Zde D_G je *matice incidence* orientovaného grafu G: řádky jsou indexovány vrcholy, sloupce hranami, a prvek matice na pozici (v, e) je $+1$ pokud v je počáteční vrchol e, -1 pokud v je koncový vrchol e, a 0 jinak. Přitom f zde chápeme jako sloupcový vektor indexovaný hranami.

Tok v síti obecně není cirkulace, protože Kirchhoffův zákon se nepožaduje pro zdroj ani pro stok. Jednoduchým trikem ale můžeme z každého toku udělat cirkulaci v upraveném grafu. Mějme síť (G, z, s, c), kde $G = (V, E)$. Pro jednoduchost předpokládejme, že $(s, z) \notin E$. Definujeme nový orientovaný graf $G' = (V, E')$, kde $E' = E \cup \{(s, z)\}$ vznikne z E přidáním hrany (s, z). Definujeme také $c(s, z)$ jako „dostatečně velké číslo“, čili například součet kapacit všech ostatních hran. Je-li dán libovolný tok f v původní síti, definujeme cirkulaci f' na G': $f'(e) = f(e)$ pro $e \in E$, a $f'(s, z) = w(f)$. Je snadné si rozmyslet, že hledání maximálního toku v síti je ekvivalentní hledání takové cirkulace f' v grafu G', jejíž hodnota na každé hraně je mezi 0 a $c(e)$, a jež maximalizuje $f'(s, z)$.

Tato nová formulace nám umožňuje zapsat úlohu maximálního toku jako úlohu *lineárního programování*, tj. úlohu nalézt řešení dané soustavy lineárních rovnic a nerovností, které maximalizuje danou lineární funkci. Konkrétně, úloha maximálního toku je ekvivalentní úloze

$$\max\{f'(s,z);\ f' \in \mathbb{R}^{|E'|},\ D_{G'} f' = 0,\ f' \le c,\ f' \ge 0\}.$$

Zde opět interpretujeme f' a c jako $|E'|$-složkové reálné vektory, a rovnost či nerovnost mezi vektory znamená rovnost či nerovnost po složkách.

Řešením obecných úloh lineárního programování se zabývá dobře vyvinutá teorie. Z vět této teorie se dá odvodit i hlavní věta o tocích jako důsledek. I spousta dalších výsledků v kombinatorice, zejména v kombinatorické optimalizaci, souvisí s lineárním programováním.

2.5 Existence maximálního toku.
Na závěr ještě slíbený důkaz existence maximálního toku i v iracionálně ohodnocených sítích.

Důkaz existence maximálního toku. Většinu tíhy důkazu (který bude spíše technického rázu) převedeme na větu ze základního kurzu matematické analýzy, která říká, že spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého maxima. Stačí tedy ověřit, že množina všech toků

$$\mathcal{F} = \{f;\ f \text{ je tok}\} \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$$

je kompaktní a že funkce $w\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ je spojitá. Množina $\mathcal{F}$ je podmnožinou $|E|$-rozměrného euklidovského prostoru, protože každý tok se dá zapsat jako $|E|$-složkový vektor.

Spojitost w. Zadefinujeme si *projekce* $\pi_e\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jako $\pi_e(f) = f(e)$, čili sadu funkcí pro každou hranu vracejících hodnotu $f(e)$. Proč je projekce spojitá? Vyjdeme z definice spojitosti na obecném metrickém prostoru. Když zvolíme nějakou velikost toku $w(f)$ a (malou) odchylku od něj, musí okolo příslušného toku f (jakožto bodu euklidovského prostoru) existovat nějaká krabička tak, že po změnách toku provedených v rámci ní se vejdeme do povolené odchylky velikosti toku. To skutečně lze udělat, viz vylepšování toků o ε v předchozích důkazech. Na funkci

$$w(f) = \sum_{(z,x)\in E} f(z,x) - \sum_{(x,z)\in E} f(x,z) = \sum_{(z,x)\in E} \pi_{(z,x)}(f) - \sum_{(x,z)\in E} \pi_{(x,z)}(f)$$

se lze pro danou síť dívat jako na lineární kombinaci konečného počtu projekcí, a je tedy též spojitá.

Kompaktnost $\mathcal{F}$. Připomeňme si, že v euklidovském prostoru je množina kompaktní, právě když je uzavřená a omezená. Množina $\mathcal{F}$ se dá uzavřít do krabičky $\prod_{e\in E}[0, c(e)]$, je tedy omezená. Pro vrcholy u si zapíšeme množiny $\mathcal{F}_u$ toků $f \in \mathbb{R}^{|E|}$ a analogicky vrcholové projekce π_u jako

$$\mathcal{F}_u = \left\{ f;\ \overbrace{\sum_{(u,x)\in E} f(u,x) - \sum_{(x,u)\in E} f(x,u)}^{\pi_u(f)} = 0 \right\} = \{f;\ \pi_u(f) = 0\} = \pi_u^{-1}(\{0\}).$$

Projekce π_u je opět spojitá, protože je lineární kombinací konečného spojitých hranových projekcí. Nyní použijeme trik z matematické analýzy. Platí věta, že vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení je opět uzavřená množina. Projekce π_u spojitá je a jednoprvková množina $\{0\}$ skutečně je uzavřená. A množina $\mathcal{F}$ je uzavřená, neboť

$$\mathcal{F} = \bigcap_{u\in V\setminus\{z,s\}} \mathcal{F}_u \cap \prod_{e\in E}[0, c(e)]$$

a průniky i konečná sjednocení uzavřených množin jsou opět uzavřené množiny. □

3. Míra souvislosti grafů

Graf můžeme rozdělit (znesouvislit) jak odebráním hran, tak také vrcholů.

Definice. *Hranový řez* v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $G' = (V, E \setminus F)$ je nesouvislý.

Vrcholový řez v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $G'' = (V \setminus A, E \cap \binom{V\setminus A}{2})$ (čili *indukovaný podgraf* $G[V \setminus A]$) je nesouvislý.

Pomocí řezů si zavedeme dva stupně souvislosti, hranovou a vrcholovou.

Definice. *Hranová souvislost* je

$$k_e(G) = \min\{|F|;\ F \subseteq E \text{ je hranový řez}\}.$$

Vrcholová souvislost je

$$k_v(G) = \begin{cases} \min\{|A|;\ A \subseteq V \text{ je vrcholový řez}\} & \text{pro } G \neq K_n \\ n-1 & \text{pro } G \simeq K_n. \end{cases}$$

U vrcholové souvislosti je třeba zvlášť ošetřit úplné grafy, protože v nich neexistuje vrcholový řez (odebráním libovolné množiny vrcholů se nám graf nikdy nerozpadne). V souladu s dřívější definicí graf tedy bude hranově (resp. vrcholově) k-souvislý, když je $k_e(G) \geq k$ (resp. $k_v(G) \geq k$). Pokud se odebráním *libovolného* vrcholu sníží stupeň souvislosti, říká se také, že graf je *kriticky* k-souvislý.

Nabízí se přirozená otázka, jak spolu $k_v(G)$ a $k_e(G)$ souvisí. Ukážeme si, že pro libovolný graf G je $k_v(G) \leq k_e(G)$. První nápad, vezmi za každou hranu z hranového řezu nějaký její vrchol, bohužel nefunguje, není totiž úplně jasné, který konec vybrat, aby vznikl korektní řez. (Viz třeba graf C_4, kde bychom zvolili dva sousední vrcholy.)

K důkazu si nejprve připravíme dvě technická tvrzení říkající v podstatě to, že odebráním hrany se hranová i vrcholová souvislost sníží nejvýše o jednu.

Lemma. *Pro každý graf G a libovolnou jeho hranu e platí*

$$k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G).$$

Důkaz. Vezmeme minimální řez F. Množina hran $F' = F \setminus \{e\}$ je potom řezem v grafu $G - e$, ne nutně minimálním, ale každopádně platí

$$k_e(G - e) \leq |F'| \leq |F| = k_e(G).$$

Dále vezmeme minimální hranový řez B v grafu $G - e$. Potom $B' = B \cup \{e\}$ bude řezem v grafu G, čili

$$k_e(G) \leq |B'| = |B| + 1 = k_e(G - e) + 1.$$

□

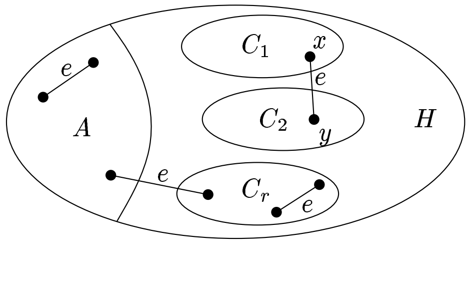
Lemma. *Pro každý graf G a libovolnou jeho hranu e platí*

$$k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G).$$

Důkaz. Úlohu si mírně přeformulujeme, budeme dokazovat pro graf $H = G - e$ nerovnost

$$k_v(H + e) \leq k_v(H) + 1.$$

V grafu H existuje vrcholový řez $A \subseteq V(H)$ takový, že $k_v(H) = |A|$. Při odebrání řezu A se nám graf H rozpadne na alespoň dvě komponenty $C_1, C_2, \ldots, C_r$. Rozebereme možnosti, odkud pochází hrana e:



(1) Hrana e je celá v řezu A. Přidáním hrany tedy nespojíme dohromady žádné komponenty, množina A bude stále řezem a tak

$$k_v(H+e) \leq |A| = k_v(H).$$

(2) Jeden vrchol hrany e je v řezu A. Stejné jako předchozí.
(3) Hrana e je celá uvnitř nějaké komponenty. Znovu stejný argument.
(4) Hrana $e = \{x, y\}$ spojuje dvě komponenty, dejme tomu $x \in C_1$ a $y \in C_2$. Když jsou komponenty alespoň tři, je vše v pořádku, protože po přidání e se spojí jen dvě komponenty a množina A zůstane řezem. Ať jsou nadále komponenty pouze dvě a bez újmy na obecnosti $|C_1| \geq |C_2|$.

Množina $A' = A \cup \{x\}$ bude vrcholovým řezem grafu $H + e$, protože C_2 a $C_1 \setminus \{x\}$ jsou komponenty souvislosti grafu $(H + e) \setminus A'$. Potom platí

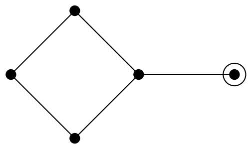
$$k_v(H+e) \leq |A'| \leq |A| + 1 = k_v(H) + 1.$$

Zbývá dořešit speciální případ, kdy jsou komponenty C_1 a C_2 jednoprvkové. Všech vrcholů je pak celkem $|V| = |A| + 2$ a spočítáme, že

$$k_v(H+e) \leq |V| - 1 = |V| - 2 + 1 = k_v(H) + 1.$$

□

Při odebrání vrcholu se sice vrcholová souvislost sníží nejvýše o jednu, nicméně může také vzrůst, třeba tady:



Věta. *Pro každý graf G platí*

$$k_v(G) \leq k_e(G).$$

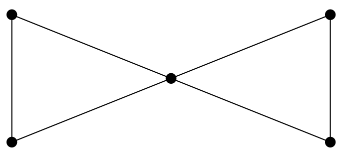
Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle počtu hran. Je-li hran méně než $|V| - 1$ (tedy vrcholy nejsou pokryty ani stromem a graf je nesouvislý), bude zjevně $k_e(G) = k_v(G) = 0$. Nechť nadále $k_e(G) > 0$.

Vezmeme nejmenší hranový řez F a jeho jednu hranu e a na graf $G' = G - e$ použijeme indukční předpoklad. Dostaneme tak

$$k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_e(G - e) = k_e(G) - 1.$$

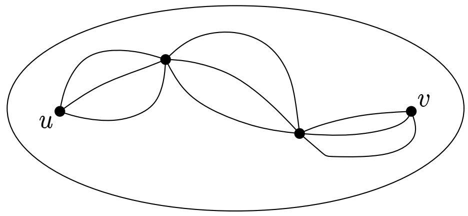
Odtud a z pomocných lemmat máme $k_v(G) \leq k_e(G)$. □

Máme-li potíže se zapamatováním, kterým směrem vlastně nerovnost platí, stačí si nakreslit motýlka:



Pro tento graf je $k_v = 1$ ale $k_e = 2$, druhý směr nerovnosti tak neplatí.

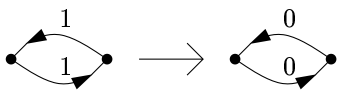
Věta (Ford, Fulkerson). *Pro každý graf a každé přirozené t je $k_e(G) \geq t$, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy u a v existuje alespoň t hranově disjunktních cest.*



Důkaz. Implikaci zprava doleva ukážeme sporem, nechť existuje hranový řez F menší než t. Po rozdělení grafu vezmeme dva vrcholy u a v ležící v různých komponentách souvislosti. Jenže mezi nimi vedlo t hranově disjunktních cest, řez F tedy na jejich rozpojení nemohl stačit.

V druhém směru použijeme skutečnosti dokázané o tocích v síti. Mějme tedy graf G takový, že $k_e(G) \geq t$, a pro dva vrcholy u a v hledáme hranově disjunktní cesty. Sestrojíme z grafu G síť $G' = (V(G), \{(x,y),(y,x);\ \{x,y\} \in E(G)\}, u, v, 1)$ tak, že oboustranně zorientujeme původní hrany, za zdroj zvolíme vrchol u, za stok vrchol v a kapacity všech hran nastavíme na 1. Pak spustíme algoritmus hledání maximálního toku.

Nalezený tok bude celočíselný, tedy po hranách poteče 0 nebo 1. Provedeme ovšem ještě drobnou úpravu – když po obou hranách (a,b) i (b,a) teče jednička, nastavíme obě na nulu, velikost toku se tím nezmění:



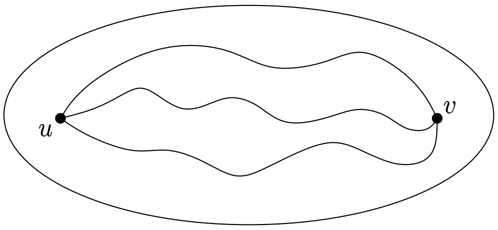
K našemu maximálnímu toku f potom existuje minimální hranový řez R.

Množina $F = \{\{x,y\};\ (x,y) \in R \vee (y,x) \in R\}$ je hranový řez v grafu G. Protože G je hranově t-souvislý, bude podle definice souvislosti i velikost řezu $|F| \geq t$. Jelikož za každou hranu z řezu R jsme do množiny F zařadili nejvýše jednu hranu, bude též $|R| \geq |F| \geq t$. Velikost toku f tak musí být alespoň t.

Zbývá zkonstruovat hranově disjunktní cesty z u do v. Existenci cest v G' ukážeme induktivně. Má-li tok velikost 1, jistě nalezneme cestu z u do v, kde na každé hrane teče jednička. Ve větším toku najdeme libovolnou jedničkovou cestu z u do v a hrany na ní vynulujeme. Velikost toku se tím sníží o 1 a existence zbývajících cest plyne z indukce. Na závěr už jen ke každé nalezené orientované cestě v G' vezmeme příslušnou neorientovanou cestu v G. $\square$

Podobné tvrzení jako je Ford–Fulkersonova věta platí i pro vrcholovou souvislost.

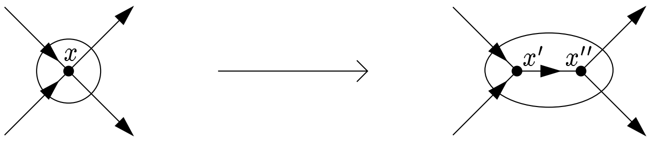
Věta (Menger). *Pro každý graf a každé přirozené t je $k_v(G) \geq t$, právě když mezi každými dvěma různými vrcholy u a v existuje alespoň t vrcholově disjunktních cest.*



Důkaz. Nejprve implikaci zprava doleva, nechť mezi každými dvěma vrcholy existuje t disjunktních cest. Předpokládejme pro spor, že $k_v(G) < t$. V úplném grafu je $k_v(G) = n - 1$ a jistě mezi dvěma vrcholy u a v nevede více než $n - 1$ cest. Stejně tak v neúplném grafu, na rozpojení t cest je třeba řez velikosti alespoň t.

Druhým směrem, nechť je G vrcholově t-souvislý, zvolíme dva vrcholy u a v. Nejprve nechť $\{u, v\} \notin E(G)$.

Hrany grafu symetricky zorientujeme, tj. nahradíme každou původní hranu hranami tam a zpátky. Výjimku budou tvořit hrany obsahující u, ty povedou pouze z vrcholu u, a hrany obsahující v, ty povedou pouze do vrcholu v. Nyní všechny vrcholy vyjma u a v takto podrozdělíme:



Formálně zapsáno, utvoříme nový graf G' takový, že

$$V(G') = \{x', x'';\ x \in V(G),\ u \neq x \neq v\}$$

a

$$E(G') = \{(x'', y'), (y'', x');\ \{x, y\} \in E(G)\} \cup \underbrace{\{(x', x'');\ x \in V(G),\ u \neq x \neq v\}}_{F},$$

kde si množinu hran vedoucích uvnitř podrozdělených vrcholů označíme jako F. Hrany vzniklé rozdělením vrcholu tak vlastně „simulují“ vrchol grafu G, je tu korespondence mezi hranami z F a vrcholy grafu G.

Kapacity všech hran v grafu G' nastavíme na 1, za zdroj a stok vezmeme vrcholy u a v a nalezneme mezi nimi maximální tok. K němu bude existovat minimální (hranový) řez R. K řezu R ovšem vždy najdeme řez $R' \subseteq F$, $|R'| \leq |R|$, jednoduše tak, že každá hrana $e \in R \setminus F$ navazuje alespoň z jedné strany na nějakou hranu $e' \in F$; stačí uvažovat e' namísto e. Když bude R' dostatečně velký (tj. $|R| \geq t$), stejným postupem jako při důkazu Ford–Fulkersonovy věty v G' nalezneme t hranově disjunktních cest z u do v.

Pro spor předpokládejme, že existuje nějaký řez $R' \subseteq F$ takový, že $|R'| < t$. Uvážíme množinu $A = \{x;\ (x', x'') \in R\}$, která bude vrcholovým řezem grafu G, neboť v $G \setminus A$ nevede žádná cesta mezi u a v. Jenže G je vrcholově t-souvislý a není úplný, dostaneme tak $t \leq |A| = |R'| < t$.

A ještě konstrukce hledaných cest v grafu G: pro cestu $(u, x_1', x_1'', x_2', x_2'', \ldots, v)$ v grafu G' vezmeme cestu $(u, x_1, x_2, \ldots, v)$. Kdyby se dvě takové cesty protínaly v nějakém x_i, musely by se protínat i původní cesty v hraně (x_i', x_i'').

Když $\{u, v\} \in E(G)$, zopakujeme celý postup pro graf $G - \{u, v\}$. Odebráním hrany se vrcholová souvislost sníží nejvýše o jednu, předchozí postup tedy nalezne $t - 1$ cest, ke kterým dodáme ještě hranu $\{u, v\}$. $\square$

Tvrzeníčko. *Nechť A je co do inkluze minimální vrcholový řez v grafu G (pro každý vrchol $v \in A$ už $A \setminus \{v\}$ řez není) a $C_1, \dots, C_r$ jsou komponenty souvislosti grafu $G \setminus A$. Potom z každého vrcholu u řezu A vedou v grafu G hrany do všech komponent souvislosti C_i.*

Důkaz. Dokážeme sporem, ať existuje vrchol $u \in A$ a komponenta C_i taková, že nejsou spojené hranou. Potom množina $A' = A \setminus \{x\}$ je také řezem, protože C_i je komponenta souvislosti grafu $G' = G \setminus A'$ a G' má aspoň dvě komponenty. To je spor s minimalitou řezu A. ☐

Ještě si připomeneme

Lemma (ušaté). *Graf G je 2-souvislý, právě když je možné vytvořit ho z libovolné jeho kružnice přidáváním uší.*

4. Systémy různých reprezentantů

Definice. *Množinovým systémem nad X* nazveme množinu $\mathcal{M} = (M_i, i \in I)$, kde $I \subset \mathbb{N}$ konečná a $M_i \subseteq X$.

Systém různých reprezentantů (SRR) je funkce $f\colon I \to X$ taková, že

(1) pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$
(2) f je prosté.

Jinými slovy, SRR je výběr jednoho prvku z každé množiny M_i takový, aby všechny vybrané prvky byly navzájem různé.

Definice. *Párování* v grafu G je množina hran $F \subseteq E(G)$ taková, že každý vrchol grafu G patří nejvýše do jedné hrany z F.

Bipartitním grafem systému $\mathcal{M}$ nazveme graf $B_{\mathcal{M}} = (I \cup X, \{\{i, x\};\ x \in M_i\})$.

Další ekvivalentní definicí párování je třeba to, že hrany v párování jsou disjunktní množiny nebo také že stupeň vrcholu v grafu obsahujícím pouze párovací hrany je nejvýše 1.

Pozorování. *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje, právě když v bipartitním grafu $B_{\mathcal{M}}$ existuje párování velikosti $|I|$.*

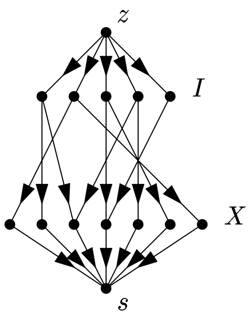
Následující věta je příkladem tvrzení, kde je na první pohled viditelná nutná podmínka zároveň i podmínkou postačující.

Hallova věta. *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje, právě když pro každou $J \subseteq I$ je $|\bigcup_{i \in J} M_i| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallova.*

Důkaz. Začneme jednodušší implikací, nechť v $\mathcal{M}$ existuje systém různých reprezentantů. Zvolíme libovolnou $J \subseteq I$. Pro každý index $j \in J$ ovšem existuje prvek p_j z množiny M_j tak, že všechny prvky p_j jsou navzájem různé. Proto

$$\Big|\bigcup_{j \in J} M_j\Big| \geq |\{p_j;\ j \in J\}| = |J|.$$

Naopak, mějme takový množinový systém $\mathcal{M}$, který splňuje Hallovu podmínku. Vezmeme bipartitní graf $B_{\mathcal{M}}$, který takto předěláme na síť:



Přesněji zapsáno, sestrojíme síť $S = (V, E, z, s, 1)$, kde

$$V = \{z, s\} \cup I \cup X$$

a

$$E = \{(z, i);\ i \in I\} \cup \{(i, x);\ i \in I, x \in M_i\} \cup \{(x, s);\ x \in X\}.$$

Kapacity hran nastavíme na 1 a nalezneme maximální tok g. V kapitole o tocích jsme si dokázali, že takový tok bude celočíselný. K toku g existuje minimální řez R'. Pro další průběh důkazu bude potřeba nějak se v řezu R' zbavit hran mezi I a X, aniž by se řez zvětšil. Vyrobíme tedy řez

$$R = \{(x, s);\ (x, s) \in R'\} \cup \{(z, i);\ (i, x) \in R'\} \cup \{(i, x);\ (i, x) \in R'\}$$

tak, že když v R' byla hrana (i, x) mezi množinami I a X, zaměníme ji za odpovídající hranu (z, i); rozpojíme tak totiž stejnou cestu jako hranou (i, x).

Označíme si

$$A = \{i;\ (z, i) \in R\}, \quad B = \{x;\ (x, s) \in R\}, \quad J = I \setminus A.$$

Hrany z J vedou do B, proto

$$\bigcup_{j \in J} M_j \subseteq B.$$

Jaká bude velikost řezu R?

$$c(R) = |A| + |B| = |I| - |J| + |B| \geq |I| - |J| + \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right|$$

Nyní použijeme Hallovu podmínku, která říká, že $|\bigcup_{j \in J} M_j| \geq |J|$, a dostaneme

$$c(R) \geq |I| - |J| + |J| = |I|,$$

tok g tak bude mít velikost alespoň $|I|$.

Zbývá říci, co je hledaným systémem různých reprezentantů. Jsou jím prostě prvky množiny X takové, že do nich tokem g teče jednička. Formálně, SRR bude funkce f, kde pro každé $i \in I$

$$f(i) = x \quad \text{takové, že} \quad g(i, x) = 1.$$

$\square$

Hallova věta má celou řadu nejrůznějších aplikací, stojí za to si ji zapamatovat. Předvedený důkaz samozřejmě není jediným možným, větu lze dokázat i přímo matematickou indukcí, bez použití toků. Nebo ji lze odvodit z Tutteovy věty, kterou vysvětlíme později.

Poznámka. Předpokládáme-li v teorii množin axiom výběru, lze dokázat variantu Hallovy věty, kde sice množiny M_i musí být konečné, ale množiny I a X mohou být nekonečné, dokonce nespočetné. Důkaz už je však poněkud složitější.

Když jsou tedy X a I nekonečné (stačí nám spočetné) a povolíme nekonečné velikosti (taktéž spočetné) množin M_i, je protipříklad poměrně jednoduchý. Stačí zvolit $X = \mathbb{N}$, $M_1 = X$ a ostatní M_i jsou všechny jednoprvkové podmnožiny množiny X. Zde systém různých reprezentantů nelze sestrojit.

4.1 Důsledky Hallovy věty.

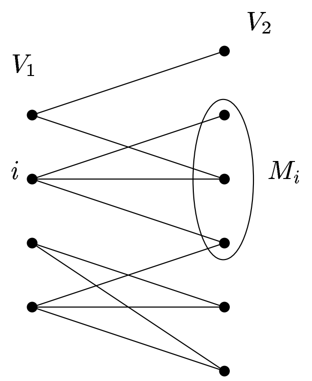
Předvedeme si několik základních důsledků Hallovy věty, velké praktické použití má zejména následující

Tvrzení. *V bipartitním grafu $B = (V_1 \cup V_2, E)$ takovém, že pro libolné dva vrcholy $x \in V_1$ a $y \in V_2$ platí $\deg_B x \geq \deg_B y$, existuje párování, které plně uspokojuje partitu V_1, tj. má velikost $|V_1|$.*

Důkaz. Zvolíme množinový systém $\mathcal{M} = (M_i, i \in I)$ nad V_2 takový, že $I = V_1$ a

$$M_i = \{x \in V_2;\ (i,x) \in E(B)\}.$$

Obrázkem:



Když o systému dokážeme, že v něm platí Hallova podmínka, bude v něm existovat systém různých reprezentantů. Tedy pro každý $i \in V_1$ bude existovat $x \in V_2$ tak, že mezi nimi povede hrana a všechna x budou navzájem různá. Ale to je přesně definice párování, které plně uspokojuje partitu V_1.

Zvolme $J \subseteq V_1$ a označíme si $k = \min_{j \in J}\{\deg_B j\}$. Z množiny J vede alespoň $k|J|$ hran do druhé partity. Kdyby $|\bigcup_{j \in J} M_j| < |J|$, z přihrádkového principu by v partitě V_2 musel existovat vrchol x, do kterého by vedlo alespoň $k+1$ hran. Jeho stupeň by tak byl vyšší než stupeň vrcholu partity V_1, což je spor s předpokladem tvrzení. $\square$

Definice. *Latinský čtverec* A je čtvercová matice řádu n taková, že

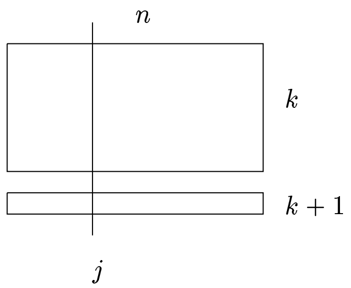
(1) $A_{ij} \in \{1, 2, \ldots, n\}$
(2) $A_{ij} \neq A_{i'j}$ pro každé j a $i \neq i'$
(3) $A_{ij} \neq A_{ij'}$ pro každé i a $j' \neq j$.

Latinský obdélník A je matice $k \times n$, splňující stejné podmínky jako latinský čtverec.

V každém řádku a sloupci latinského čtverce či obdélníku se tedy vyskytují jen navzájem různá čísla.

Tvrzení. *Každý latinský obdélník, kde počet řádků k je nižší než počet sloupců n, lze doplnit na latinský čtverec.*

Důkaz. K latinskému obdélníku budeme postupně konstruovat další a další řádky, dokud jich nebude n.



Setrojíme bipartitní graf $G = (S \cup H, E)$, kde $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ je množina sloupců latinského obdélníku a $H = \{1, \ldots, n\}$ je množina hodnot, ze kterých konstruujeme $(k+1)$-ní řádek. Hrana vede mezi s_i a x, pokud se hodnota x nevyskytuje v i-tém sloupci, tedy

$$E = \{\{s_i, x\};\ x \notin s_i\}.$$

Nyní chceme do nového řádku na j-tou pozici vybrat takový prvek x, že x se jednak nevyskytuje v sloupci s_j a jednak všechny takto vybrané prvky x jsou navzájem různé. To je ale ekvivalentní s existencí párování v grafu G, které plně uspokojuje partitu S.

Jaké stupně vrcholů mají jednotlivé partity grafu G? V latinském obdélníku o k řádcích chybí v každém sloupci jistě $n - k$ hodnot, proto pro každý $s_i \in S$ je $\deg_G s_i = n - k$.

Naopak, v kolika sloupcích může chybět prvek x? Prvek x se v každém řádku vyskytuje právě jednou a protože řádků je k, je jím tedy obsazeno právě k různých sloupců; jinak by byly dva prvky x v jednom sloupci a nebyl by to latinský obdélník. Stejně jako v první partitě i pro každý $x \in H$ je $\deg_G x = n - k$ a podle předchozího tvrzení existuje párování uspokojující partitu S. $\square$

5. Perfektní párování

5.1 Definice a Tutteova věta.

Definice. Párování M v grafu G nazveme *perfektní*, pokud $|M| = \frac{|V(G)|}{2}$.

Věta (Tutte). *Graf G má perfektní párování, právě když pro každou $A \subseteq V(G)$ je počet komponent souvislosti grafu $G \setminus A$, které mají lichou velikost, nejvýše $|A|$; tato podmínka se nazývá Tutteova.*

Než přistoupíme k důkazu, připravíme si několik pomocných tvrzení.

Lemma. *Graf G je disjunktním sjednocením úplných grafů, právě když G neobsahuje $K_{1,2}$ (neboli „třešničku") jako indukovaný podgraf.*

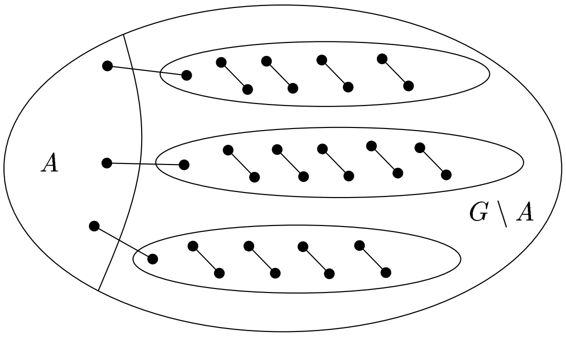
Důkaz. Pokud je G disjuntním sjednocením úplných grafů, triviálně nemůže obsahovat $K_{1,2}$. Naopak obměnou, nechť G není disjuntní sjednocením úplných grafů, chceme ukázat, že obsahuje $K_{1,2}$. Existuje tedy komponenta souvislosti C a v ní dva vrcholy x a y takové, že mezi nimi nevede hrana. Vrcholy x a y jsou v C propojené cestou P, na cestě P pak nutně musí existovat tři vrcholy tvořící $K_{1,2}$. Kdyby neexistovaly, každá trojice vrcholů by tvořila trojúhelník, jenže hrana chybí již mezi x a y. □

Lemma. *Nechť graf G splňuje Tutteovu podmínku, potom ji pro libovolnou hranu e splňuje i graf $G + e$.*

Důkaz. Máme-li nějaký řez A a zvolíme-li libovolnou hranu e k přidání, zjevně spojíme dohromady nejvýše dvě komponenty grafu $G \setminus A$. Ani počet lichých komponent tak nevzroste. □

Důkaz Tutteovy věty. Počet lichých komponent souvislosti v grafu G si označíme symbolem $C_\ell(G)$.

Nejprve nechť v grafu G existuje perfektní párování. Zvolíme libovolnou množinu $A \subseteq V(G)$, v grafu $G \setminus A$ tak vzniknou nějaké komponenty souvislosti, zajímat nás ale budou jen komponenty liché velikosti. Ať bylo perfektní párování jaké chtělo, v každé liché komponentě přebývá alespoň jeden vrchol, který nutně musel být spárován s nějakým vrcholem z množiny A. Dvě liché komponenty nemohly sdílet stejný vrchol z množiny A, a tedy $C_\ell(G \setminus A) \leq |A|$.



Druhá implikace je tou složitější, nechť nám platí Tutteova podmínka. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu hran, netradičně však v obráceném pořadí, od $\binom{n}{2}$ k 0.

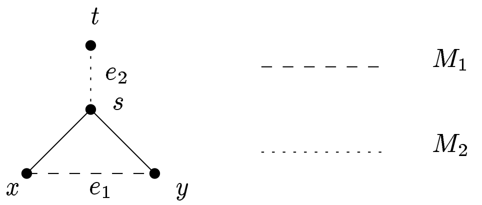
Pro případ úplného grafu K_n je situace jednoduchá. Pro $A = \emptyset$ dostaneme, že n musí být sudé a tudíž lze K_n perfektně vypárovat.

Nadále přepokládejme, že v grafu G chybí alespoň jedna hrana. Zvolíme množinu W vrcholů takových, že z nich vede hrana do všech ostatních vrcholů grafu G:

$$W := \{u;\ \deg_G u = n - 1\}$$

Jestliže je graf $G \setminus W$ disjunktním sjednocením úplných grafů, dokážeme jednoduše najít perfektní párování. Komponenty souvisloti grafu $G \setminus W$ (což jsou úplné grafy) sudé velikosti jistě vypárujeme. V každé liché komponentě nelze spárovat pouze jeden vrchol, množinu všech takových vrcholů si označíme V. Z Tutteovy podmínky ovšem víme, že $|V| = C_\ell(G \setminus W) \leq |W|$, vrcholy V tedy spárujeme s množinou W.

Nechť nyní $G \backslash W$ disjunktním sjednocením úplných grafů není. Podle předchozího lemmatu v něm existuje $K_{1,2}$ jako indukovaný podgraf. Vrcholy si označíme takto:



Ve vrcholu s nutně musí chybět hrana do nějakého vrcholu $t \in V(G)$; jinak by totiž s byl zařazen do množiny W. Označíme $e_1 = \{x, y\}$ jednou barvou a $e_2 = \{s, t\}$ druhou barvou, ani e_1 ani e_2 nejsou hranami grafu G.

Z dokázaného lemmatu víme, že oba grafy $G + e_1$ i $G + e_2$ taktéž splňují Tutteovu podmínku. Podle indukčního předpokladu proto v $G + e_1$ existuje perfektní párování M_1 a v $G + e_2$ existuje perfektní párování M_2. Na obrázcích si hrany pocházející z M_1 označíme barvou hrany e_1, hrany pocházející z M_2 barvou hrany e_2. Zadefinujeme množinu hran M jako

$$M := M_1 \div M_2,$$

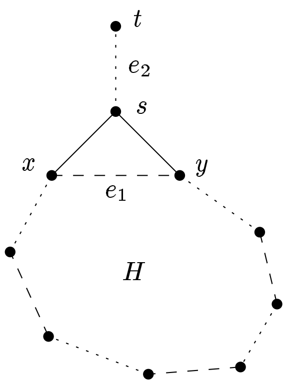
kde $\div$ značí symetrickou diferenci množin.[2]

S takovou množinou hran je ovšem pro každý vrchol

$$\deg_M u = \begin{cases} 0 & \text{z vrcholu } u \text{ vedly stejné párovací hrany} \\ 2 & \text{z vrcholu } u \text{ vedly různé párovací hrany.} \end{cases}$$

Každá komponenta souvislosti v takovém grafu je potom buďto izolovaný vrchol nebo kružnice sudé délky, kde se pravidelně střídají hrany obou barev. Označíme H hrany kružnice, na které leží hrana e_1, a rozebereme dva případy. V obou se budeme snažit sestrojit perfektní párovaní, jež neobsahuje ani jednu z hran e_1 a e_2.

(1) Hrana $e_2 \notin H$.

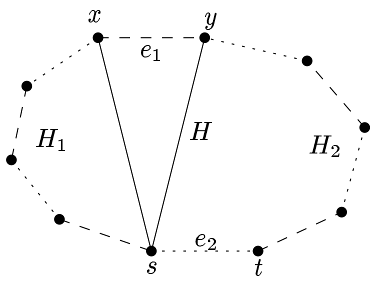


[2] Čili $M = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$, „xor“ pro informatiky.

Do perfektního párování $\tilde{M}$ mimo kružnici H můžeme zahrnout jak M_1, tak M_2, vybereme tedy třeba M_1, na kružnici H použijeme hrany M_2. Formálně

$$\tilde{M} := (H \cap M_2) \cup (M_1 \setminus H).$$

(2) Hrana $e_2 \in H$.



Úsek na kružnici H mezi x a s neobsahující y označíme H_1, úsek mezi y a t neobsahující x označíme H_2. Mimo kružnici H lze použít obě párování, užijeme třeba znovu M_1. V úseku H_1 zanecháme pouze hrany M_2, v úseku H_2 pouze hrany M_1. Zbývají spárovat už jen vrcholy y a s, mezi nimi ovšem vede hrana, zahrneme ji proto do párování. Perfektní párování $\tilde{M}$ tedy je

$$\tilde{M} := (M_1 \setminus H) \cup (H_1 \cap M_2) \cup (H_2 \cap M_1) \cup \{y, s\}.$$

□

5.2 Edmondsův algoritmus.

V minulém oddílu jsme si charakterizovali grafy mající perfektní párování. Protože ne v každém grafu perfektní párování existuje, bude nás zajímat alespoň párování maximální, tedy pokrývající co největší počet vrcholů.[3] Ukážeme si algoritmus, který pro libovolný graf maximální párování nelezne v polynomiálním čase.

Připravíme si nejprve pár technických prostředků.

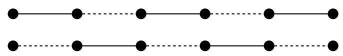
Definice. Nechť M je párování grafu G. Vrchol $u \in V(G)$ nazveme *volný*, pokud $\deg_M u = 0$.

Cestu $u_1, u_2, \ldots, u_{2k}$ v grafu G nazveme *volnou střídavou cestou*, pokud

(1) vrcholy u_1 a u_{2k} jsou volné,
(2) hrany $\{u_{2i+1}, u_{2i+2}\} \notin M$,
(3) hrany $\{u_{2i}, u_{2i+1}\} \in M$.

Lemma 1. *Párování M je maximální, právě když neexistuje volná střídavá cesta.*

Důkaz. Když v grafu existuje volná střídavá cesta, párování M jistě není největší:



[3]V anglické terminologii se důsledně rozlišuje (a to nejen u párování) „maximum pairing“, tedy párování pokrývající co největší počet vrcholů, a „maximal pairing“ pro největší párování ve smyslu inkluze, tedy párování, ke kterému již nelze přidat žádnou další hranu.

Nechť naopak M není největší, existuje párování M' takové, že $|M'| > |M|$. Zadefinujeme si množinu hran $\tilde{M}$ jako

$$\tilde{M} = M \div M',$$

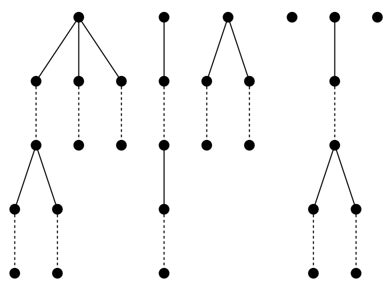
s kterou tak má každý vrchol stupeň 0 nebo 2. Komponenty souvislosti této konfigurace jsou kružnice sudé délky a cesty, kde se pravidelně střídají hrany M a M'. Jelikož $|M'| > |M|$, musí existovat komponenta tvaru liché cesty, v níž je o jednu hranu M' více, než hran M, tvoří tak volnou střídavou cestu. □

Lemma 2. *Nechť lichá kružnice C_{2k+1} obsahuje volný vrchol a $k = |E(C_{2k+1}) \cap M|$. Potom M je maximální párování v G, právě když $M \setminus E(C_{2k+1})$ je maximální párování v grafu $G \cdot C_{2k+1}$, tj. s kružnicí C_{2k+1} zkontrahovanou do jednoho vrcholu.*

Důkaz. Pokud existovala volná střídavá cesta v G, zjevně bude existovat i v $G \cdot C_{2k+1}$ a opačně. Z lemmatu 1 tak víme, že M je maximální párování v G, právě když $M \setminus E(C_{2k+1})$ je maximální párování v $G \cdot C_{2k+1}$. □

Algoritmus (Edmonds). Vstupem algoritmu je graf G a jeho libovolné párování M, třeba prázdné. Výstupem je párování M'.

(1) Zkonstruuj maximální možný les vůči M:



(2) Když existuje hrana grafu G mezi sudými hladinami různých stromů, zvětši M o 1 hranu podél volné střídavé cesty, která tak vznikne. Jdi na 1.

(3) Když existuje hrana mezi sudými hladinami jednoho stromu, najdi C_{2k+1} s k párovacími hranami, uvolni nejvyšší vrchol (překlopením párovacích a nepárovacích hran na cestě z nejvyššího vrcholu do kořene), zkonstrahuj C_{2k+1}. Rekurzivně se zavolej na $(G \cdot C_{2k+1}, M \setminus E(C_{2k+1}))$.
   * Když $M \setminus E(C_{2k+1})$ je největší možné párování v $G \cdot C_{2k+1}$, pak M je maximální. Konec.
   * Když $M \setminus E(C_{2k+1})$ není největší, M' je větší, polož $M := M'$. Jdi na 1.

(4) Když neexistuje hrana mezi sudými hladinami, je M maximální párování.

6. Hamiltonovské kružnice

6.1 Definice a Chvátalova charakterizace hamiltonovských grafů.

Definice. *Hamiltonovská kružnice* v grafu G je kružnice obsahující všechny vrcholy.

Pozorování. *Graf G, který má sudý počet vrcholů a existuje v něm hamiltonovská kružnice, má perfektní párování.*

Důkaz. Stačí postupovat po hamiltonovské kružnici a každou druhou hranu zařadit do párování. ☐

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Zavedeme graf $[G] = (V, E')$, na začátku $E' := E$. Budeme opakovat náaledující krok tak dlouho, dokud to půjde:

- Když existují dva vrcholy $u, v \in V$, $\{u, v\} \notin E'$, splňující

$$\deg_{[G]} u + \deg_{[G]} v \geq |V|,$$

  pak položíme $E' := E' \cup \{u, v\}$.

Graf $[G]$ nazveme *Chvátalovým uzávěrem* grafu G.

Pozorování. *Chvátalův uzávěr je určen jednoznačně.*

Důkaz. Mějme graf G a pro spor vezměme dva různé Chvátalovy uzávěry $[G]_1$ a $[G]_2$. Do $[G]_1$ jsme postupně přidávali hrany $e_1, \dots, e_k$, do $[G]_2$ hrany $f_1, \dots, f_r$. Zvolíme hranu $e_i = \{u, v\}$ první takovou, že $e_i \notin E([G]_2)$.

V čase $i - 1$ byly stupně vrcholů u a v o jedna menší než v čase i a jejich součet byl alespoň $|V|$. Proto jistě

$$\deg_{[G]_2} u + \deg_{[G]_2} v \geq \deg_{[G]_1^{i-1}} u + \deg_{[G]_1^{i-1}} \geq |V|$$

a nutně tak musela být hrana e_i zařazena i do $[G]_2$. ☐

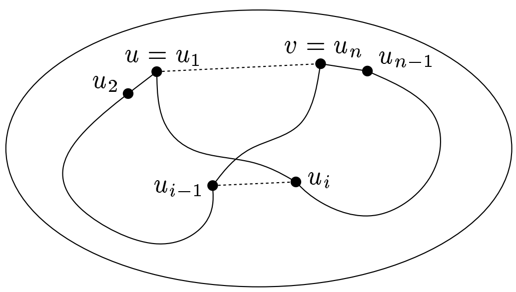
Věta. *Graf G má hamiltonovskou kružnici, právě když ji má graf $[G]$.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je zřejmá. Pro opačný směr nám stačí ukázat následující tvrzení:

* Nechť pro dva vrcholy $u, v \in V(G)$, $\{u, v\} \notin E(G)$ takové, že $\deg_G u + \deg_G v \geq n$, je graf $G + \{u, v\}$ hamiltonovský, potom je hamiltonovský i G.

Zpětným obíráním Chvátalova uzávěru $[G]$ o hrany nakonec dosáhneme opět grafu G, který bude mít hamiltonovskou kružnici.

Hamiltonovskou kružnici v $G + \{u, v\}$ si označíme K. Pokud $\{u, v\} \notin K$, je vše v pořádku, K je hamiltonovskou kružnicí i v G. Nechť nadále $\{u, v\} \in K$. Naším cílem bude ukázat, že hranu $\{u, v\}$ lze „přemostit“.



Bez újmy na obecnosti $K = \{u = u_1, u_2, \dots, u_n = v\}$. Definujeme množinu A jako ta čísla vrcholů u_i, do kterých vede hrana z u, a množinu B jako o jedna menší čísla vrcholů do kterých vede hrana z v:

$$A = \{i;\ \{u, u_i\} \in E(G)\},$$

$$B = \{i;\ \{v, u_{i-1}\} \in E(G)\}.$$

Zřejmě $|A| = \deg u$ a $|B| = \deg v$, také určitě $A \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}$ a $B \subseteq \{3, 4, \ldots, n\}$. Proto $|A \cup B| \leq n - 1$. Ukážeme, že $A \cap B \neq \emptyset$:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = \deg u + \deg v - |A \cup B| \geq n - |A| + |B| \geq n - (n-1) \geq 1,$$

Tedy pro nějaké $i \in A \cap B$ se vyskytují v grafu G hrany $\{u, u_i\}$ a $\{v, u_{i-1}\}$. Hamiltonovská kružnice K' grafu G tak bude tvaru

$$K' = u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, v = u_n, u_{n-1}, \ldots, u_i, u.$$

□

Důsledek. *Nechť v grafu G pro každé dva vrcholy u a v, $\{u, v\} \notin E(G)$ platí $\deg u + \deg v \geq n$. Pak G je hamiltonovský.*

Důkaz. Graf $[G]$ je úplný graf a ten jistě má hamiltonovskou kružnici. Tedy ji má i G. □

Otázka, zda v grafu existuje hamiltonovská kružnice, je slavný NP-úplný problém. Charakterizace hamiltonovských kružnic podle českého matematika Václava Chvátala tedy sice nedává algoritmicky použitelnou metodu, jak hamiltonovské grafy rozpoznávat, nicméně je teoreticky hezká a dá se využít v nejrůznějších heuristických vylepšeních jednoduchého backtrackového algoritmu, které beží rychleji na hustších grafech.

A ještě pro zajímavost (a bez důkazu)

Věta (Smith). *Nechť graf G má všechny stupně vrcholů liché. Potom každou hranou prochází sudý počet hamiltonovských kružnic.*

6.2 Problém obchodního cestujícího.

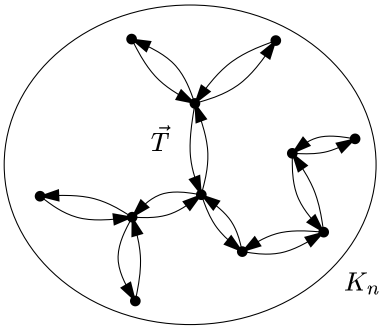
Problém obchodního cestujícího (travelling sales person – TSP) je další slavnou NP-úplnou úlohou. Máme daný graf G s ohodnocenými hranami, a úkolem je najít hamiltonovskou kružnici s minimálním součtem vah. Motivací pro TSP je, jak název napovídá, rozvrhnout obchodnímu cestujícímu program návštěv jednotlivých měst, aby v každém byl právě jednou, skončil opět doma, a co nejvíce ušetřil na benzínu.

Jelikož je TSP algoritmicky obtížný, ukážeme si alespoň algoritmus, který dává přibližný výsledek. Takovým algoritmům se říká *aproximační*.

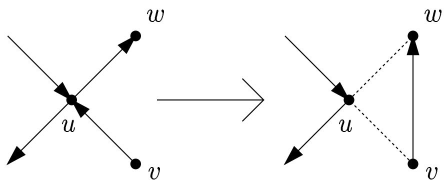
Přibližný algoritmus. Vstupem je úplný graf K_n s nezáporným ohodnocením hran w. Na w platí trojúhelníková nerovnost, tj. pro každé tři hrany tvaru $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$ je

$$w(\{x, y\}) + w(\{y, z\}) \geq w(\{x, z\}).$$

(1) Najdi minimální kostru T.
(2) Graf G (včetně kostry T) symetricky zorientuj, zachovej váhy hran.



(3) Nakresli orientovanou kostru $\vec{T}$ jedním tahem. Sledu hran, který tím dostaneme, říkejme S.
(4) Dokud existuje vrchol u s alespoň dvěma výstupními hranami, nahrazuj v sledu S hrany (u, w) a (v, u) hranou (v, w).



(5) Vrať S.

Tvrzení. *Algoritmus je polynomiální a vrátí trasu obchodního cestujícího S, jejíž délka je*

$$w(S) \leq 2.(\textit{optimální řešení TSP}).$$

Důkaz. Kroky 1 až 3 jistě umíme provést v polynomiálním čase. V každé iteraci kroku 4 snížíme $\deg^+ u$ a $\deg^- u$ o jedna, krok 4 se tedy provede nejvýše tolikrát, kolik je počet hran grafu G. Algoritmus je tak polynomiální.

V průběhu algoritmu platí invariant, že sled S prochází všemi vrcholy grafu G. Na konci neexistuje vrchol, ze kterého by vycházely dvě hrany, sled S tedy prochází každým vrcholem právě jednou.

V kroku 1 je jistě $w(T) \leq OPT$. V kroku 3 se díky orientaci $\vec{T}$ započítá každá hrana dvakrát, tedy

$$w(S) = w(\vec{T}) = 2w(T) \leq 2 \cdot OPT.$$

Protože ohodnocení hran splňuje trojúhelníkovou nerovnost, při opakování kroku 4 se $w(S)$ nezvětší. □