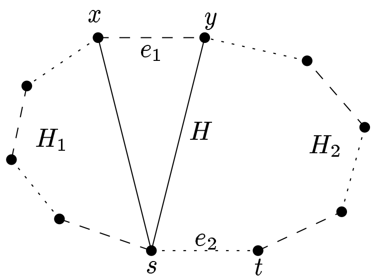
Do perfektního párování $\tilde{M}$ mimo kružnici H můžeme zahrnout jak M_1, tak M_2, vybereme tedy třeba M_1, na kružnici H použijeme hrany M_2. Formálně

$$\tilde{M} := (H \cap M_2) \cup (M_1 \setminus H).$$

(2) Hrana $e_2 \in H$.



Úsek na kružnici H mezi x a s neobsahující y označíme H_1, úsek mezi y a t neobsahující x označíme H_2. Mimo kružnici H lze použít obě párování, užijeme třeba znovu M_1. V úseku H_1 zanecháme pouze hrany M_2, v úseku H_2 pouze hrany M_1. Zbývají spárovat už jen vrcholy y a s, mezi nimi ovšem vede hrana, zahrneme ji proto do párování. Perfektní párování $\tilde{M}$ tedy je

$$\tilde{M} := (M_1 \setminus H) \cup (H_1 \cap M_2) \cup (H_2 \cap M_1) \cup \{y, s\}.$$

□

5.2 Edmondsův algoritmus.

V minulém oddílu jsme si charakterizovali grafy mající perfektní párování. Protože ne v každém grafu perfektní párování existuje, bude nás zajímat alespoň párování maximální, tedy pokrývající co největší počet vrcholů.[3] Ukážeme si algoritmus, který pro libovolný graf maximální párování nelezne v polynomiálním čase.

Připravíme si nejprve pár technických prostředků.

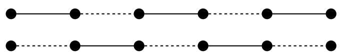
Definice. Nechť M je párování grafu G. Vrchol $u \in V(G)$ nazveme *volný*, pokud $\deg_M u = 0$.

Cestu $u_1, u_2, \ldots, u_{2k}$ v grafu G nazveme *volnou střídavou cestou*, pokud

(1) vrcholy u_1 a u_{2k} jsou volné,
(2) hrany $\{u_{2i+1}, u_{2i+2}\} \notin M$,
(3) hrany $\{u_{2i}, u_{2i+1}\} \in M$.

Lemma 1. *Párování M je maximální, právě když neexistuje volná střídavá cesta.*

Důkaz. Když v grafu existuje volná střídavá cesta, párování M jistě není největší:



[3]V anglické terminologii se důsledně rozlišuje (a to nejen u párování) „maximum pairing", tedy párování pokrývající co největší počet vrcholů, a „maximal pairing" pro největší párování ve smyslu inkluze, tedy párování, ke kterému již nelze přidat žádnou další hranu.

Nechť naopak M není největší, existuje párování M' takové, že $|M'| > |M|$. Zadefinujeme si množinu hran $\tilde{M}$ jako

$$\tilde{M} = M \div M',$$

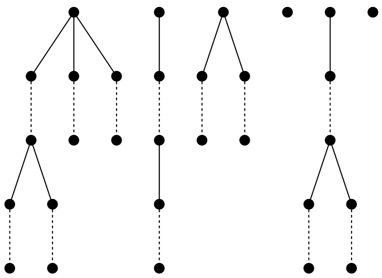
s kterou tak má každý vrchol stupeň 0 nebo 2. Komponenty souvislosti této konfigurace jsou kružnice sudé délky a cesty, kde se pravidelně střídají hrany M a M'. Jelikož $|M'| > |M|$, musí existovat komponenta tvaru liché cesty, v níž je o jednu hranu M' více, než hran M, tvoří tak volnou střídavou cestu. □

Lemma 2. *Nechť lichá kružnice C_{2k+1} obsahuje volný vrchol a $k = |E(C_{2k+1}) \cap M|$. Potom M je maximální párování v G, právě když $M \setminus E(C_{2k+1})$ je maximální párování v grafu $G \cdot C_{2k+1}$, tj. s kružnicí C_{2k+1} zkontrahovanou do jednoho vrcholu.*

Důkaz. Pokud existovala volná střídavá cesta v G, zjevně bude existovat i v $G \cdot C_{2k+1}$ a opačně. Z lemmatu 1 tak víme, že M je maximální párování v G, právě když $M \setminus E(C_{2k+1})$ je maximální párování v $G \cdot C_{2k+1}$. □

Algoritmus (Edmonds). Vstupem algoritmu je graf G a jeho libovolné párování M, třeba prázdné. Výstupem je párování M'.

(1) Zkonstruuj maximální možný les vůči M:



(2) Když existuje hrana grafu G mezi sudými hladinami různých stromů, zvětši M o 1 hranu podél volné střídavé cesty, která tak vznikne. Jdi na 1.

(3) Když existuje hrana mezi sudými hladinami jednoho stromu, najdi C_{2k+1} s k párovacími hranami, uvolni nejvyšší vrchol (překlopením párovacích a nepárovacích hran na cestě z nejvyššího vrcholu do kořene), zkonstrahuj C_{2k+1}. Rekurzivně se zavolej na $(G \cdot C_{2k+1}, M \setminus E(C_{2k+1}))$.
   * Když $M \setminus E(C_{2k+1})$ je největší možné párování v $G \cdot C_{2k+1}$, pak M je maximální. Konec.
   * Když $M \setminus E(C_{2k+1})$ není největší, M' je větší, polož $M := M'$. Jdi na 1.

(4) Když neexistuje hrana mezi sudými hladinami, je M maximální párování.

6. Hamiltonovské kružnice

6.1 Definice a Chvátalova charakterizace hamiltonovských grafů.

Definice. *Hamiltonovská kružnice* v grafu G je kružnice obsahující všechny vrcholy.

Pozorování. *Graf G, který má sudý počet vrcholů a existuje v něm hamiltonovská kružnice, má perfektní párování.*

Důkaz. Stačí postupovat po hamiltonovské kružnici a každou druhou hranu zařadit do párování. □

Definice. Mějme graf $G = (V, E)$. Zavedeme graf $[G] = (V, E')$, na začátku $E' := E$. Budeme opakovat náaledující krok tak dlouho, dokud to půjde:

- Když existují dva vrcholy $u, v \in V$, $\{u, v\} \notin E'$, splňující
$$\deg_{[G]} u + \deg_{[G]} v \geq |V|,$$
pak položíme $E' := E' \cup \{u, v\}$.

Graf $[G]$ nazveme *Chvátalovým uzávěrem* grafu G.

Pozorování. *Chvátalův uzávěr je určen jednoznačně.*

Důkaz. Mějme graf G a pro spor vezměme dva různé Chvátalovy uzávěry $[G]_1$ a $[G]_2$. Do $[G]_1$ jsme postupně přidávali hrany $e_1, \ldots, e_k$, do $[G]_2$ hrany $f_1, \ldots, f_r$. Zvolíme hranu $e_i = \{u, v\}$ první takovou, že $e_i \notin E([G]_2)$.

V čase $i - 1$ byly stupně vrcholů u a v o jedna menší než v čase i a jejich součet byl alespoň $|V|$. Proto jistě
$$\deg_{[G]_2} u + \deg_{[G]_2} v \geq \deg_{[G]_1^{i-1}} u + \deg_{[G]_1^{i-1}} \geq |V|$$
a nutně tak musela být hrana e_i zařazena i do $[G]_2$. □

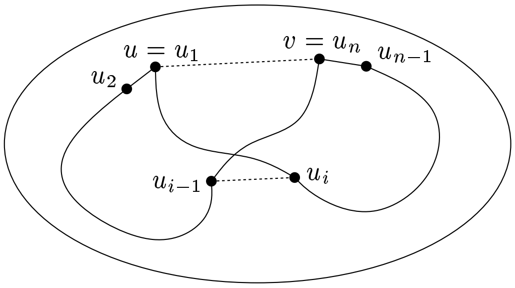
Věta. *Graf G má hamiltonovskou kružnici, právě když ji má graf $[G]$.*

Důkaz. Implikace zleva doprava je zřejmá. Pro opačný směr nám stačí ukázat následující tvrzení:

* Nechť pro dva vrcholy $u, v \in V(G)$, $\{u, v\} \notin E(G)$ takové, že $\deg_G u + \deg_G v \geq n$, je graf $G + \{u, v\}$ hamiltonovský, potom je hamiltonovský i G.

Zpětným obíráním Chvátalova uzávěru $[G]$ o hrany nakonec dosáhneme opět grafu G, který bude mít hamiltonovskou kružnici.

Hamiltonovskou kružnici v $G + \{u, v\}$ si označíme K. Pokud $\{u, v\} \notin K$, je vše v pořádku, K je hamiltonovskou kružnicí i v G. Nechť nadále $\{u, v\} \in K$. Naším cílem bude ukázat, že hranu $\{u, v\}$ lze „přemostit“.



Bez újmy na obecnosti $K = \{u = u_1, u_2, \ldots, u_n = v\}$. Definujeme množinu A jako ta čísla vrcholů u_i, do kterých vede hrana z u, a množinu B jako o jedna menší čísla vrcholů do kterých vede hrana z v:
$$A = \{i;\ \{u, u_i\} \in E(G)\},$$

$$B = \{i;\ \{v, u_{i-1}\} \in E(G)\}.$$

Zřejmě $|A| = \deg u$ a $|B| = \deg v$, také určitě $A \subseteq \{2, 3, \ldots, n-1\}$ a $B \subseteq \{3, 4, \ldots, n\}$. Proto $|A \cup B| \leq n - 1$. Ukážeme, že $A \cap B \neq \emptyset$:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = \deg u + \deg v - |A \cup B| \geq n - |A| + |B| \geq n - (n-1) \geq 1,$$

Tedy pro nějaké $i \in A \cap B$ se vyskytují v grafu G hrany $\{u, u_i\}$ a $\{v, u_{i-1}\}$. Hamiltonovská kružnice K' grafu G tak bude tvaru

$$K' = u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, v = u_n, u_{n-1}, \ldots, u_i, u.$$

□

Důsledek. *Nechť v grafu G pro každé dva vrcholy u a v, $\{u, v\} \notin E(G)$ platí $\deg u + \deg v \geq n$. Pak G je hamiltonovský.*

Důkaz. Graf $[G]$ je úplný graf a ten jistě má hamiltonovskou kružnici. Tedy ji má i G. □

Otázka, zda v grafu existuje hamiltonovská kružnice, je slavný NP-úplný problém. Charakterizace hamiltonovských kružnic podle českého matematika Václava Chvátala tedy sice nedává algoritmicky použitelnou metodu, jak hamiltonovské grafy rozpoznávat, nicméně je teoreticky hezká a dá se využít v nejrůznějších heuristických vylepšeních jednoduchého backtrackového algoritmu, které beží rychleji na hustších grafech.

A ještě pro zajímavost (a bez důkazu)

Věta (Smith). *Nechť graf G má všechny stupně vrcholů liché. Potom každou hranou prochází sudý počet hamiltonovských kružnic.*

6.2 Problém obchodního cestujícího.

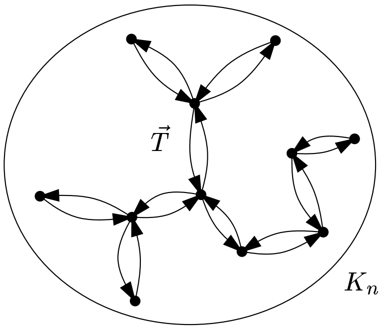
Problém obchodního cestujícího (travelling sales person – TSP) je další slavnou NP-úplnou úlohou. Máme daný graf G s ohodnocenými hranami, a úkolem je najít hamiltonovskou kružnici s minimálním součtem vah. Motivací pro TSP je, jak název napovídá, rozvrhnout obchodnímu cestujícímu program návštěv jednotlivých měst, aby v každém byl právě jednou, skončil opět doma, a co nejvíce ušetřil na benzínu.

Jelikož je TSP algoritmicky obtížný, ukážeme si alespoň algoritmus, který dává přibližný výsledek. Takovým algoritmům se říká *aproximační*.

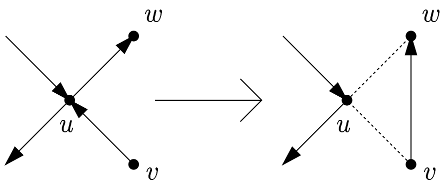
Přibližný algoritmus. Vstupem je úplný graf K_n s nezáporným ohodnocením hran w. Na w platí trojúhelníková nerovnost, tj. pro každé tři hrany tvaru $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$ je

$$w(\{x, y\}) + w(\{y, z\}) \geq w(\{x, z\}).$$

(1) Najdi minimální kostru T.
(2) Graf G (včetně kostry T) symetricky zorientuj, zachovej váhy hran.



(3) Nakresli orientovanou kostru $\vec{T}$ jedním tahem. Sledu hran, který tím dostaneme, říkejme S.
(4) Dokud existuje vrchol u s alespoň dvěma výstupními hranami, nahrazuj v sledu S hrany (u, w) a (v, u) hranou (v, w).



(5) Vrať S.

Tvrzení. *Algoritmus je polynomiální a vrátí trasu obchodního cestujícího S, jejíž délka je*

$$w(S) \leq 2.(\textit{optimální řešení TSP}).$$

Důkaz. Kroky 1 až 3 jistě umíme provést v polynomiálním čase. V každé iteraci kroku 4 snížíme $\deg^+ u$ a $\deg^- u$ o jedna, krok 4 se tedy provede nejvýše tolikrát, kolik je počet hran grafu G. Algoritmus je tak polynomiální.

V průběhu algoritmu platí invariant, že sled S prochází všemi vrcholy grafu G. Na konci neexistuje vrchol, ze kterého by vycházely dvě hrany, sled S tedy prochází každým vrcholem právě jednou.

V kroku 1 je jistě $w(T) \leq OPT$. V kroku 3 se díky orientaci $\vec{T}$ započítá každá hrana dvakrát, tedy

$$w(S) = w(\vec{T}) = 2w(T) \leq 2 \cdot OPT.$$

Protože ohodnocení hran splňuje trojúhelníkovou nerovnost, při opakování kroku 4 se $w(S)$ nezvětší. □